**CNAM Optimisation en informatique OI RCP 104**

Examen SEPTEMBRE 2007

Tout document autorisé ***Merci de commencer chaque partie en haut d'une nouvelle page.***

## Partie I-Placement de tâches et de bases de données

On considère un réseau de $N$ processeurs $P_1, P_2, .., P_N$ reliés par un réseau local. Sur chaque processeur $P_k$ est installée une base de données $B_k$, $k=1,..,N$.

On veut répartir $M$ tâches $T_1, T_2, .., T_M$, sur ces processeurs. Chaque tâche $T_i$ doit accéder à une ou plusieurs bases de données et le volume d'informations que $T_i$ récupère sur la base $B_k$ est égal à $Vol_{ik}$ ($Vol_{ik}$=0 si $T_i$ n'utilise pas $B_k$); $i=1,..,M; k=1,..,N$. Les tâches ne communiquent pas entre elles.

On veut affecter les tâches aux processeurs de façon à minimiser le volume total d'informations circulant sur le réseau, c'est-à-dire le volume total d'informations entre les tâches et les bases de données qu'elles consultent si ces bases ne sont pas sur le même processeur qu'elles.

On définit les variables $x_{ik} (i=1,...,M; k=1,..,N)$ : $x_{ik}=1$ si la tâche $T_i$ est installée sur $P_k$; $x_{ik}=0$ sinon. On note $\bar{x}_{ik}=1-x_{ik}$.

Q1 Ecrire la fonction objectif à minimiser, $Z$.

Q2 Ecrire les contraintes implicites que doivent vérifier les tâches, $C1$.

Q3 Un processeur ne peut accueillir plus de $R$ tâches. Ecrire les contraintes $C2$ associées. (On suppose que $RN \geq M$ )

Q4 Une solution initiale peut être obtenue de la façon suivante:

> Pour chaque tâche $T_i$
> Considérer les processeurs $P_k$ selon l'ordre des $Vol_{ik}$ décroissant
> Affecter $T_i$ au premier processeur rencontré qui peut l'accueillir (c'est-à-dire qui n'a pas encore $R$ tâches); ce processeur existe toujours puisque $RN \geq M$ .

Pensez-vous que la solution obtenue est proche de l'optimum (discuter selon la valeur de $R$) ?

Q5 On veut tenter d'améliorer la solution initiale à l'aide d'un algorithme de recuit simulé. Un seul type de mouvement est autorisé:

Q5-a Définir ce mouvement sachant qu'il ne faut pas figer le nombre de tâches par processeur.

Q5-b Quelles précautions faudra t'il prendre dans l'algorithme pour conserver une solution admissible à chaque itération?

Q5-c Donner la variation de coût associée au mouvement défini ($\Delta coût$). On notera les processeurs $P_a$, $P_b$,… et les tâches $T_i$, $T_j$…

Q6 On suppose maintenant que le nombre de tâches $M$ est égal à $RN$ et qu'on veut affecter exactement $R$ tâches à chaque processeur.

Q6-a Ecrire les nouvelles contraintes *C2'* associées.

Q6-b La recherche de la solution initiale doit-elle être modifiée? Justifier rapidement votre réponse.

Q6-c On veut à nouveau utiliser un recuit simulé pour trouver une solution, en n'autorisant qu'un seul type de mouvement. Définir ce mouvement.

Q6-d Donner la variation de coût associée au mouvement défini ($\Delta coût$). Comme avant, on notera les processeurs $P_a, P_b,\ldots$ et les tâches $T_i, T_j\ldots$

Q7 On suppose maintenant que les bases de données ne sont pas pré-affectées aux processeurs et qu'il y a $B$ bases de données ($B \geq N$): il faut répartir les tâches ET les bases de données entre les processeurs, l'objectif restant le même. Un processeur peut accueillir au plus $R$ tâches et 3 bases de données. On utilise les variables $x_{ik}\ (i = 1,...,M; k = 1,..,N)$ précédentes et on définit les nouvelles variables: $y_{jk} = 1$ si la base de données $B_j$ est installée sur $P_k$; $y_{jk} = 0$ sinon $(j = 1,...,3; k = 1,..,N)$.

Q7-a Ecrire la fonction objectif à minimiser, *Z'*.

Q7-b Ecrire toutes les contraintes que doivent vérifier les $y_{jk}$. (Les autres contraintes restent identiques).

## Partie II- Résolution de problèmes

Soit $P$ le programme mathématique en variables 0-1 suivant :

$$P\begin{cases} \min 5x_{11} + 3x_{21} + 7x_{31} + 7x_{12} + 4x_{22} + 10x_{32} \\ s.c. \\ x_{11} + x_{12} = 1 \\ x_{21} + x_{22} = 1 \\ x_{31} + x_{32} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 2{,}5 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 2{,}5 \\ x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{21}, x_{22}, x_{32} \in \{0{,}1\} \end{cases}$$

1) Réécrire la fonction objectif en fonction des seules variables $x_{12}, x_{22}, x_{32}$.
2) Vérifier que les valeurs $x_{11} = x_{31} = 1$ ; $x_{21} = x_{22} = 0{,}5$ *et* $x_{12} = x_{32} = 0$ forment une solution admissible pour le problème *P'* obtenu par relaxation continue de *P*. Quelle est la valeur de cette solution ?
3) Par quel raisonnement (court) peut-on prouver que la solution ci-dessus est optimale pour *P'* ?
4) Par un raisonnement analogue, trouver une solution optimale pour *P*.
5) Quelle inégalité valide simple peut-on ajouter à *P'* afin de « couper » la solution de la question 2) ? Que devient la valeur optimale de *P'* si on ajoute cette coupe ?