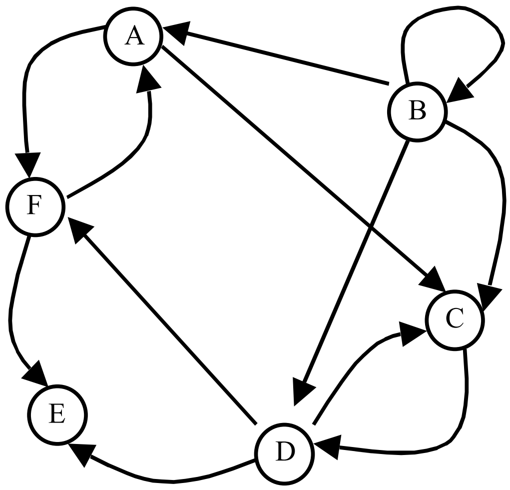
THEORIE DES GRAPHES

Notions de base

I) Soit le graphe G :



1) Donner $\Gamma^+(A)$, $\Gamma^+(B)$, $\Gamma^-(A)$, $\Gamma^-(B)$.

2) Donner les demi-degrés intérieurs et extérieurs des sommets A et B. Donner les entrée(s) et les sortie(s) de G.

3) Donner un exemple de chemin simple mais non élémentaire.

4) Existe-il un circuit hamiltonien dans G ?

5) G est-il fortement connexe ? Justifier en détail.

6) Donner plusieurs arborescences différentes, de racine B, extraites du graphe.

II) AFFAIRE DE LOGIQUE

LA TABLE POLYGLOTTE

Indication : introduire un graphe biparti.

a) UN DÎNER réunit huit personnes de nationalités différentes. Voici les langues qu'elles parlent :

Ann : anglais, français, portugais.

Biba : anglais, portugais, russe.

Charles : anglais, russe.

Dimitri : anglais, allemand, portugais, russe.

Evita: allemand, espagnol, néerlandais.

Frédéric : français, espagnol, néerlandais.

Gunther : allemand, italien.

Helena : espagnol, italien.

Complétez les cartons indiquant l'initiale des convives autour de la table ronde de sorte que :

- chaque convive puisse converser avec chacun de ses deux voisins autrement que par signes.
- il y ait alternance entre les hommes et les femmes.

b) Même problème avec 2 tables rondes de 4 personnes.

III) LA FRAGILITE DES TEMOIGNAGES

Cinq figures géométriques : un cercle, un triangle, un carré, un trapèze et un hexagone, ont été coloriées (chacune d'une couleur différente) et montrées à Ariane et à Bruno.

On interroge, le lendemain, Ariane et Bruno en leur demandant quelle était la couleur de chaque figure : voici les réponses :

Ariane : "le cercle était rouge, le triangle bleu, le carré blanc, le trapèze vert et l'hexagone jaune".

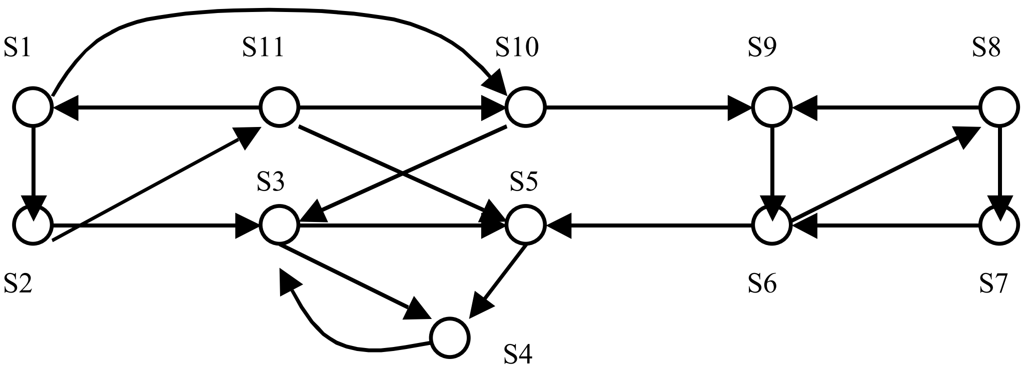
Bruno : "le cercle était jaune, le triangle vert, le carré rouge, le trapèze bleu et l'hexagone blanc".

Ariane s'est trompée trois fois, Bruno deux fois, mais pour chaque figure la couleur correcte à été citée par l'un ou l'autre.

Déterminer la couleur de chaque figure.

GRAPHES : FORTE CONNEXITE

I) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe ci-dessous :



II) On observe un système aux instants t = 0, 1, 2, … ; à t, l'observation permet de déterminer <u>l'état</u> du système $X_t \in \{E_1 , E_2 , \dots, E_r\} = E$. E est donc l'ensemble des états du système.

On a affaire à une chaîne de Markov si :

$\Pr [X_{t+1} = E_j \mid X_0 = E_{i_0} ,\ X_1 = E_{i_1} , \dots, X_t = E_i] = \Pr[X_{t+1} = E_j \mid X_t = E_i]$ (propriété "sans mémoire").

De plus on suppose cette dernière probabilité indépendante de t ("homogénéité") :

$\Pr [X_{t+1} = E_j \mid X_t\ E_j] = pij$.

C'est donc la probabilité de transition de E_i vers E_j entre deux instants consécutifs.

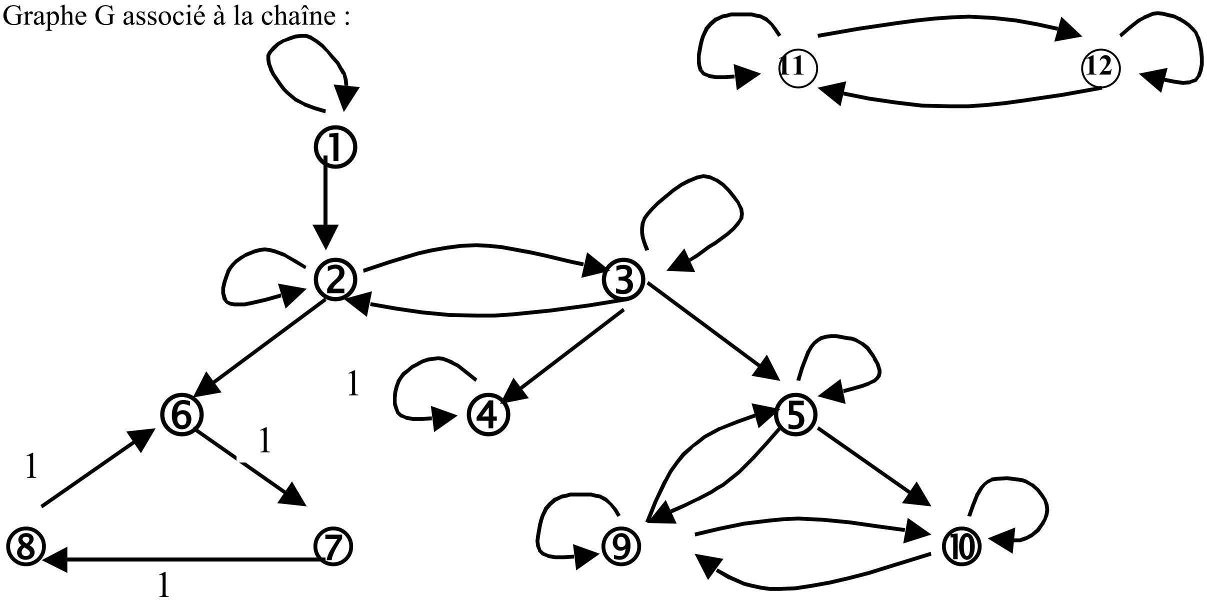
Ainsi une chaîne de Markov finie est-elle donnée par la connaissance de l'ensemble des états, E, et par celle des probabilités de transition : M = [pij]

EXEMPLE E = {E1 , E2 , … , E12}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,5	0,5										
2		0,2	0,5			0,3						
3		0,1	0,1	0,3	0,5							
4				1								
5					0,3				0,6	0,1		
6							1					
7								1				
8						1						
9					0,2				0,3	0,5		
10									0,6	0,4		
11											0,3	0,7
12											0,6	0,4

Les probabilités de transitions non indiquées sont nulles.

Graphe G associé à la chaîne :



$$G = (X, U) \text{ avec } \begin{cases} X = E \\ U = \left\{ (i, j) \mid p_{ij} > 0 \right\} \end{cases}$$

Les COMPOSANTES CONNEXES sont les SOUS-CHAINES de la chaîne de Markov

A l'intérieur de chaque sous-chaîne, les COMPOSANTES FORTEMENT CONNEXES constituent des "classes d'états".

On distingue les classes "**transitoires**", pour lesquelles la probabilité de quitter cette classe est non nulle, les classes "**récurrentes**" ou **"terminales"** (une fois que le système se trouve dans un état de cette classe, il ne peut plus quitter la classe).

Donner les classes transitoires et récurrentes de chaque sous-chaîne.

Quelles remarques pouvez-vous faire sur la classe {4} ?

Sur la classe {6, 7, 8} ?

ORDONNANCEMENTS DE PROJETS : PERT

I

On doit exécuter 4 tâches A, B, C et D soumises aux contraintes de précédence ci-dessous :

Tâche	**Durée**	**Contraintes**
A	6 jours	-
B	5 jours	-
C	4 jours	A achevée
D	5 jours	A, B achevées

1. Tracer un graphe PERT et calculer le chemin critique.

Déterminer la marge totale de chaque tâche.

II

Très préoccupé de la réussite de vos prochaines vacances, vous avez décidé de procéder scientifiquement. Pour cela vous avez déterminé l'ensemble des tâches indispensables à votre départ, puis estimé la durée probable de chacune et établi les liens de précédence entre tâches.

Vous avez alors obtenu le tableau suivant :

	TACHES	DUREE (jours)	TACHES PREALABLES
A	Choisir la destination	2	/
B	Déterminer la date de départ et la durée des vacances	3	/
C	Faire renouveler mon passeport	7	/
D	Poser les jours de vacances auprès de mon employeur	4	B
E	Acheter mes devises	10	A
F	Acheter mon billet	6	A, D
G	Obtenir le visa du Pays	5	A, C
H	Choisir l'itinéraire et réserver certains hôtels	2	E, F, G

Vous souhaitez trouver un ordonnancement qui minimise la durée de ces préparatifs. Si vous avez commencé à vous soucier de vos vacances un 22 mai, pouvez vous envisager de partir le 6 Juin ?

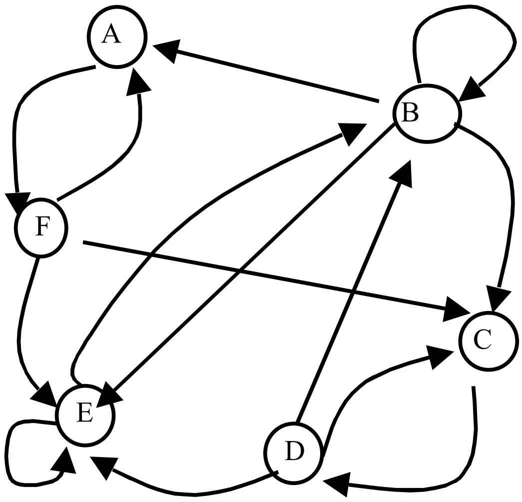
ORDONNANCEMENTS : Méthodes des potentiels (MPM)

REPRESENTATION D'UN GRAPHE

I

Reprendre les problèmes I ET II de l'ED n°3 par la méthode des potentiels (MPM)

II



Représenter ce graphe sous forme :

a) matricielle
b) de listes d'adjacence

III

Soit le graphe G = (X, U) de n = 6 sommets (numérotés de I = 1 à I = 6 et de m = 7 arcs (numérotés comme ci-dessous de j= 1 à j = 7), valué par des coûts et défini par les 3 tableaux suivants :

a) le tableau NARC (I) désigne le demi-degré extérieur du sommet I :

I	1	2	3	4	5	6
NARC (I)	1	2	1	1	2	0

Vous expliquerez pourquoi on a $\sum_{i=j}^{n} NARC(I) = m$

b) le tableau EXTR(J) liste, dans l'ordre lexicographique, les successeurs du sommet 1, puis du sommet 2, etc…(s'ils existent) ; EXTR(J) désigne le numéro du sommet qui est l'extrémité terminale de l'arc d'indice j($1 \leq J \leq 7$) : on a donc numéroté les arcs en commençant par ceux issus du sommet 1, puis du sommet 2 et ainsi de suite.

J	1	2	3	4	5	6	7
EXTR(J)	6	1	3	6	1	2	4

c) Le tableau COUT (J) désigne la capacité de l'arc d'indice J :

J	1	2	3	4	5	6	7
COUT (J)	9	8	3	4	5	7	6

Tracer le graphe G, à grande échelle. Montrer qu'il comporte une entrée e et une sortie □.

FERMERTURE TRANSITIVE ; COMPLEXITE

I

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G :

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Calculer M^2, M^3, M^4.

Commenter la signification des coefficients non nuls des matrices :

2) Calculer $M^{[2]}$, $M^{[3]}$, $M^{[4]}$ et commenter (produits booléens).

3) En déduire $(I + M)^{[4]}$ (produit booléen)

4) Appliquer l'algorithme de Roy-Warshall directement sur le graphe.

II

Evaluer les complexités des 3 programmes suivants :

- dans le meilleur des cas
- dans le pire des cas
- en moyenne

1) Calcul du produit des matrices carrées : C = A∗B

```
Pour i allant de 1 à n faire
    Pour j allant de 1 à n faire
    c[i , j] : = 0
        pour k allant de 1 à n faire
         c [ i, j ] : = c [ i, j ] + a [ i, k ] * b [ k, j ]
        fin pour (k)
    fin pour (j)
fin pour (i)
```

2) Rechercher dans un tableau un élément y, sachant qu'il figure une fois et une seule dans ce tableau.

```
i := 1 ;
tant que (i ≠N) et (Tab(i) ≠ y) faire
i := i + 1
fin tant que
```

3) programme rudimentaire de tri d'un tableau Tab comportant n éléments.

```
Pour  i allant de 1 à (n – 1)
    pour j allant de (i + 1) à n
        si Tab(i) < Tab(j) alors
                élt := Tab(j)
                Tab(i) := Tab(j)
                Tab(j) := élt
        fin si
    fin pour (j)
fin pour (i)
```

III

Schéma de LEGENDRE :Calcul de A^P (A : matrice carrée ; p entier ≥ 2) (facultatif)

Début

/ * initialisation */

k : = 0 / * k est l'indice des itérations */

Z : = I / * I : matrice identité n x n ; en fin de calcul Z = A^P */

X : = A ;

y : = P ;

Tant que y ≠ 0 faire

si y est pair alors y : _ y/2 ; X : = X.X ;

sinon y : _ y – 1 ; Z : = Z.X ;

fin si

k : = k + 1 ;

fin tant que

fin

Exemple : calcul de A^{23} (p = 23)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Z	I	A	A	A^3	A^3	A^7	A^7	A^7	A^{23}
X	A	A	A^2	A^2	A^4	A^4	A^8	A^{16}	A^{16}
y	23	22	11	10	5	4	2	1	0

0) Montrer que, pour l'exemple, on effectue 8 – 1 produits de matrices. Généraliser.

1) On veut prouver que $Z^{(k)} . (X^{(k)})^{y^{(k)}}$ est un invariant, pour toute itération k,égal à A^P.

On raisonne par récurrence :

- Vérifier que $Z^{(0)} . (X^{(0)})^{y^{(0)}}$ est bien égal à A^P.
- En supposant que la propriété est vraie à l'itération k, montrer qu'elle est encore vraie à l'itération k + 1 (on distinguera deux cas, selon que $y^{(k)}$ est pair ou impair). Conclure.

2) En déduire que lors de la dernière itération, soit pour k = m, on a bien $Z^{(m)} = A^P$.

3) Si $p = 2^k$, évaluer le nombre de produits de matrices effectuées.

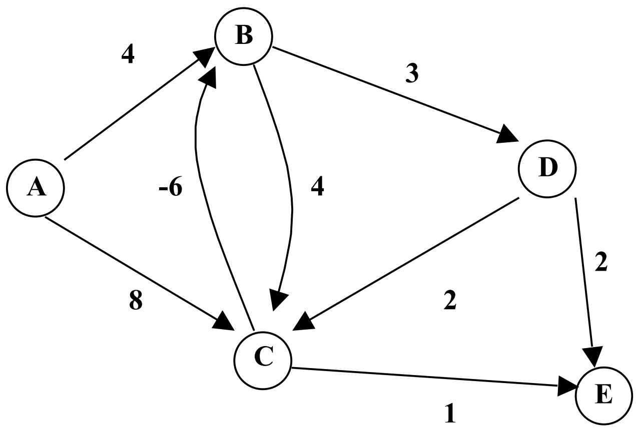
Si p n'est pas une puissance de 2, donner la valeur de ce nombre en vous aidant de l'écriture en binaire de l'entier p.

CHEMINS OPTIMAUX

I

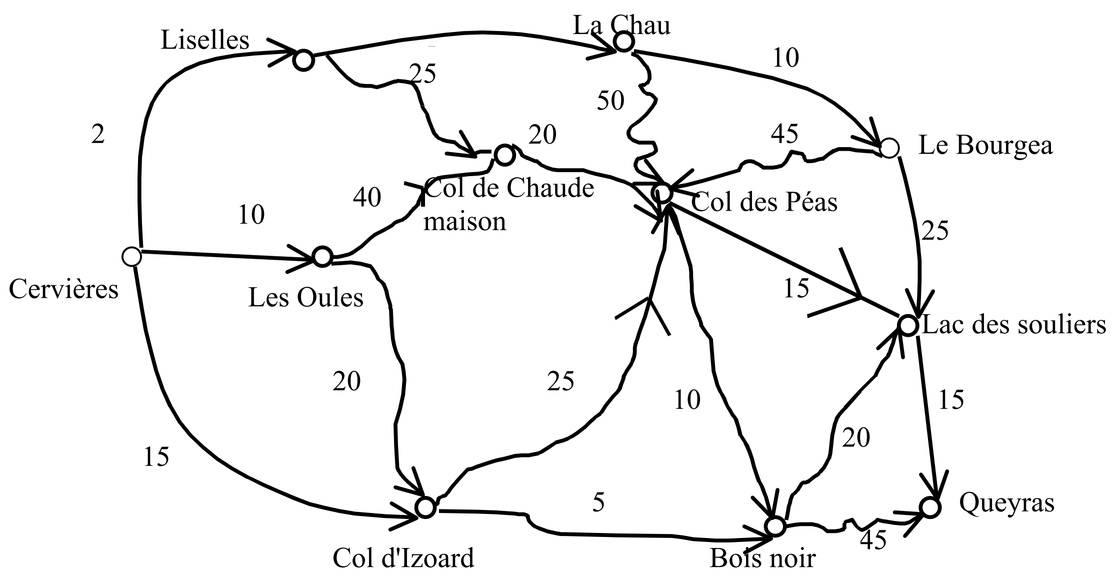
1) En utilisant l'algorithme de FORD, trouver le chemin de valeur maximale allant du sommet A vers tout autre sommet :

2) Peut-on déterminer un chemin de valeur minimale de A vers E ?



II

En suivant le GR 58…



Au chalet du Syndicat d'initiative de Cervières (Hautes Alpes), les guides disposent d'une carte d'état major annotée comme ci-dessus. Les valuations portées sur les sentiers indiquent le niveau de difficulté afférent à chaque tronçon.

La belle randonnée à faire (avec guide) est de gagner le Queyras où vous attend un bon chalet bien aménagé et …un car pour rentrer !

Les guides mesurent la difficulté totale d'une randonnée par la somme des niveaux de difficulté des différents tronçons de sentiers empruntés.

Un touriste en vacances à Cervières souhaite faire la randonnée en empruntant la voie la plus facile. Pouvez-vous l'aider ? .

1) Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour trouver le chemin de difficulté minimale de Cervières vers tout autre sommet.
2) Arrive à Cervières un groupe de sportifs bien entraînés qui veulent, eux, accomplir la randonnée la plus difficile pour aller à Queyras.

Peut-on encore utiliser l'algorithme de Dijkstra pour trouver cet itinéraire ? Pourquoi ?

FLOTS MAXIMAUX.

I

I) Un graphe de n = 5 sommets et m = 8 arcs est décrit par la liste des successeurs :

i	1	2	3	4	5
d+i	2	2	3	0	1

j	1	2	3	4	5	6	7	8
ext(j)	2	5	1	5	1	2	5	4

On rappelle que le tableau ext(j) liste, dans l'ordre lexicographique, les extrémités terminales des arcs issus du sommet 1 puis celles du sommet 2, etc.

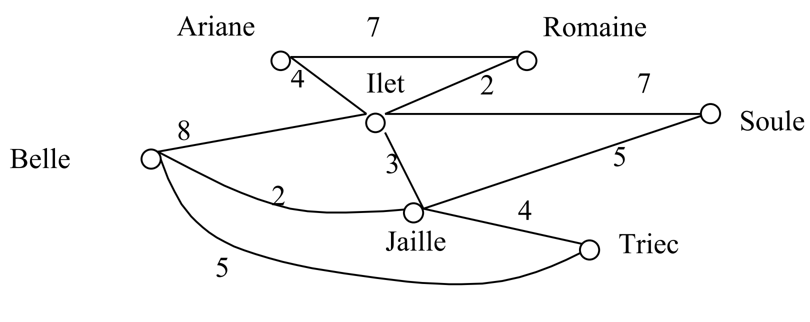
1) Tracer ce graphe. Montrer, en détail, qu'il s'agit d'un réseau de transport (la capacité de chaque arc étant donnée à la question suivante).
2) On associe à chaque arc *j* une capacité et un flux :

j	1	2	3	4	5	6	7	8
capa(j)	1	3	2	5	5	3	4	12
flux(j)	1	3	2	2	2	3	4	9

Vérifier que les flux proposés forment bien un flot sur ce réseau de transport. Déterminer, obligatoirement à l'aide de l'algorithme approprié, si ce flot est maximal. Sinon, l'optimiser. Donner la valeur du flot maximal ; indiquer une coupe minimale, et rappeler sa signification concrète.

II

Dans une région montagneuse, deux sources dénommées Ariane et Belle sont situées aux altitudes respectives de 1000 et 980 mètres ; elles débitent respectivement 10 et 12 centaines de m3 par jour. Des canalisations ont été installées pour transporter l'eau depuis les sources jusqu'à trois villages (Romaine, Soule, Triec), ceci soit directement, soit en passant par deux points intermédiaires (Ilet, Jaille) situés à 700 et 900 mètres ; en ces points de même qu'aux sources, un bassin et un système de vannes permettent de répartir l'eau selon des débits souhaités. Les trois villages sont situés à une altitude inférieure à 600 mètres ; leurs besoins respectifs en eau sont de 6, 7 et 8 centaines de m3 par jour.



Le croquis ci-dessus donne le plan des canalisations ainsi que leur débit maximal journalier (exprimé en centaines de m^3)

1. Déduire de ce croquis un graphe que l'on orientera à l'aide de l'énoncé ci-dessus. Tracer ce graphe à grande échelle.

Compléter ce graphe de manière appropriée, puis reconnaître un problème d'optimisation classique;

2. Donner un premier plan d'acheminement de l'eau dans lequel OBLIGATOIREMENT, vous ferez passer par la canalisation entre les deux points intermédiaires une centaine de m3 d'eau par jour, et dans lequel vous satisferez les besoins des villages Romaine et Soule intégralement.

Ce plan est-il optimal au sens de la maximisation du débit total ? (pour répondre utilisez un algorithme du cours).

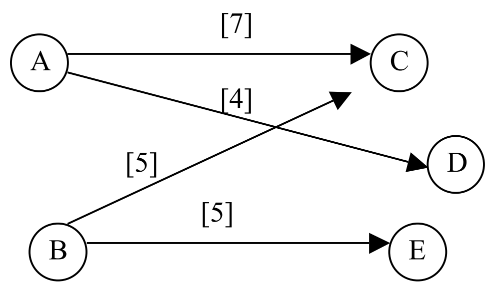
Sinon, en remettant en cause – si nécessaire- les indications du 2., donner un plan optimal.

3. Quelle (s) canalisation(s) faudrait-il renforcer pour satisfaire aussi les besoins de Triec ? Généraliser au cas d'un réseau quelconque.

III

Une certaine marchandise X est disponible dans deux ports A et B selon les quantités respectives 10 et 10 milliers de tonnes et est attendue dans les trois ports C, D et E selon les quantités respectives 9, 12 et 7. Les lignes maritimes existantes sont représentées par les arcs du graphe tracé ci-dessous :

GRAPHE



Ces arcs sont affectés d'une capacité représentant la quantité totale maximale qui peut être transportée sur la ligne correspondante.

1) Est-il possible de satisfaire toutes les demandes ?

2) Comment organiser les expéditions de façon à livrer un maximum de marchandises ? On commencera obligatoirement par expédier une quantité 7 de A vers C et on complétera pour les autres lignes maritimes, quitte à modifier ultérieurement cette décision si nécessaire.

On utilisera pour cela un réseau de transport que l'on précisera. Rechercher alors un flot optimal par l'algorithme approprié (donner le détail de son application) et donner la coupe minimale correspondante.

PROGRAMMES DE TRANSPORT

I

Une entreprise de distribution possède 3 entrepôts où sont stockées ses marchandises et 4 magasins. Elle souhaite déterminer le plan de transport lui permettant d'acheminer au moindre coût la marchandise des entrepôts vers les magasins.

La disponibilité des entrepôts s'élève respectivement à 60, 30 et 90.

Les demandes des magasins valent 50, 75, 30 et 25.

Enfin les coûts de transports unitaires des entrepôts vers les magasins sont résumés dans le tableau suivant (en unités monétaires) :

Magasin / Entrepôts	M1	M2	M3	M4
E1	6	7	5	5
E2	12	11	10	13
E3	14	16	15	17

1)Trouver une solution initiale en utilisant l'heuristique de votre choix.

3) Proposer à l'entreprise le plan de transport optimal.

II

Une société spécialisée dans les conserves alimentaires a installé trois dépôts en banlieue parisienne (notés a, b, c). Cinq hypermarchés (notés d,e,f,g et h) on passé commande de ces conserves.

Dans le tableau ci-dessous on a indiqué :

- les coûts unitaires de transports (en F/tonnes) pour une semaine donnée
- Les demandes des hypermarchés (en tonnes) pour cette même semaine;

	d	e	f	g	h	disponibilités
a	21	17	16	11	17	13
b	11	5	16	14	13	4
c	9	7	16	19	21	7
demandes	5	3	3	5	8	

1) Déterminer une solution à l'aide de l'heuristique la plus efficace que vous connaissiez. Quel est son coût ? S'agit-il d'une solution de base ?
2) Déterminer, à l'aide d'un arbre, si cette solution est optimale. Sinon, l'optimiser.
3) La solution optimale est-elle dégénérée ? Unique ?

III

Le centre informatique d'une grande banque dispose de 3 ordinateurs centraux (M1, M2, M3) de caractéristiques différentes sur lesquels les terminaux peuvent lancer 4 types de tâches différentes (A, B, C et D). Les capacités des ordinateurs et la demande horaire pour chacun de ces types de tâches sont les suivantes.

Capacités disponibles de chaque ordinateur central :

Ordinateur central	M1	M2	M3
Capacité/heure	100	70	90

Ainsi l'ordinateur M1 peut traiter 100 tâches par heure quelque soit leur type.
Demande horaire pour chaque type de tâche :

Type de tâche	A	B	C	D
Demande/heure	50	70	60	80

On cherche à distribuer les tâches en fonction des capacités des ordinateurs centraux, de manière à optimiser le coût global de fonctionnement (constitué des coûts d'exploitation, de pupitrage, de réseau, de contrôle…).
A cet effet, on a étudié en détail le coût d'exécution de chaque tâche sur chaque ordinateur central. la conclusion est que les coûts peuvent être décomposés suivant les coûts élémentaires suivants :

- Coût réseau
- Coût en accès disque
- Coût processeur.

Les tâches ont été décomposées de la manière suivante :

Tâches	Réseau	Disque	Processeur
A	10%	30%	60%
B	20%	50%	30%
C	30%	30%	40%
D	50%	20%	30%

Les coûts élémentaires suivant les centraux sont :

Ordinateurs	Réseau	Disque	Processeur
M1	80	20	10
M2	30	60	10
M3	40	20	20

Le coût de l'exécution sur une machine d'une tâche donnée est obtenu en combinant les coûts partiels.
Exemple :

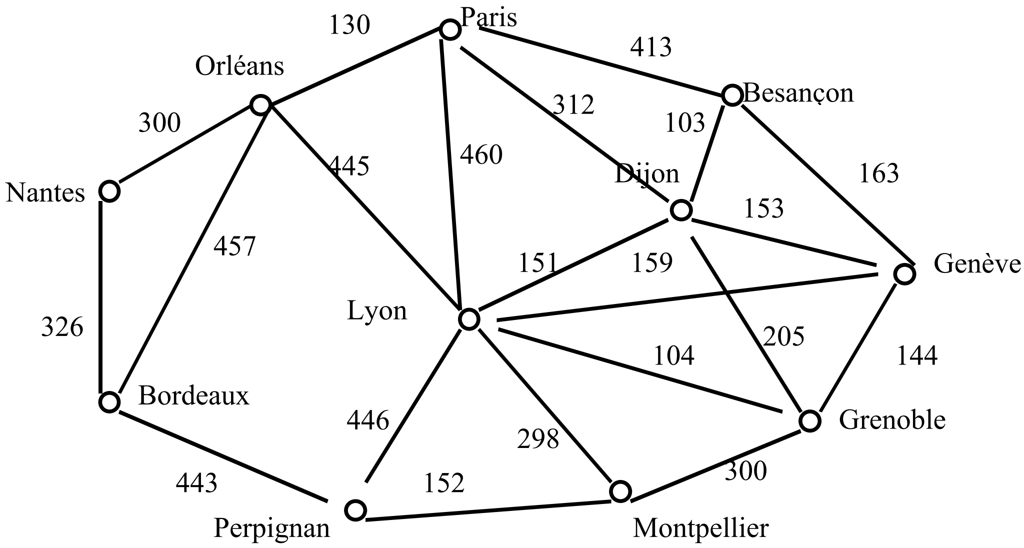
-Tâche A sur la machine M1 : $C(M1, A) = (80 \times 0,10) + (20 \times 0,30) + (10 \times 0,60) = 20$

- Tâche C sur la machine M3 : $C(M3, C) = (40 \times 0,30) + (20 \times 0,30) + (20 \times 0,40) = 26$

1) Donner le tableau 3 x 4 des coûts de traitement, sur chaque ordinateur central, des différentes tâches. Quel modèle classique reconnaissez-vous ? La demande globale et la capacité totale sont-elles égales ?
2) Trouver une solution initiale en utilisant la méthode de la différence maximale (heuristique de BALAS-HAMMER).
3) La solution obtenue est-elle optimale ? Sinon la calculer.
4) On veut, à partir de la solution optimale, effectuer une substitution portant sur (M1, C). Quelle est la quantité maximale (en nombre de tâches) substituable ?

   Quelle est alors la nouvelle solution ? De combien est-elle plus chère que l'optimum ?

ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMAL



I

Trouver l'arbre de valeur minimale pour le graphe ci-contre :

1) Par l'algorithme de Kruskal
2) Par l'algorithme de Prim

II

Une banque désire installer au moindre coût un réseau de transmissions de données entre son agence centrale située dans le quartier de la Bourse à Paris et sept de ses succursales. Il s'agit d'un réseau arborescent composé de lignes privées point à point à 2400 bauds avec des possibilités de concentrateurs. Le coût de construction d'une ligne entre deux agences est donné par le tableau suivant (en unités monétaires) :

	B	O	E	R	StL	L	N	C
Bourse	-							
Opéra	5	-						
Etoile	18	17	-					
République	9	11	27	-				
St Lazare	13	7	23	20	-			
Louvre	7	12	15	15	15	-		
Neuilly	38	38	20	40	40	35	-	
Châtelet	22	15	25	25	30	10	45	-

(Ces coûts ont été déterminés en fonction des distances entre les différentes agences et du chiffre d'affaire de chaque succursale).

1) Quel problème classique reconnaissez-vous ?
2) Déterminer la solution optimale du problème.

PARCOURS EN LARGEUR D'UN GRAPHE

EXERCICE I

Soit le graphe orienté donné par la matrice binaire ci-dessous :

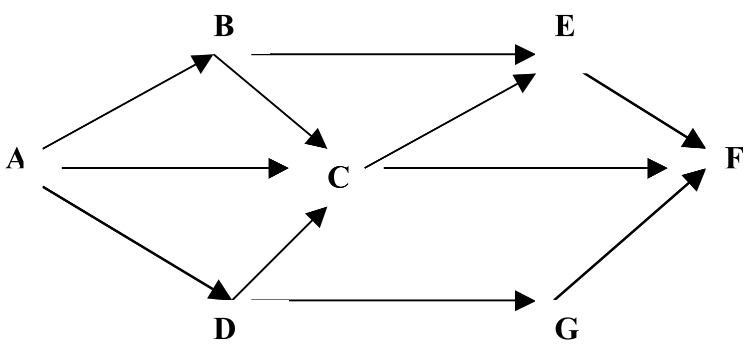
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
C	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
D	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
E	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
F	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
G	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
I	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
J	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Déterminer par un parcours en largeur si ce graphe est connexe, sans le tracer. Sinon, déterminer les composantes connexes.

On utilisera une file pour effectuer le parcours.

EXERCICE II

Soit le graphe ci-dessous, de $n = 6$ sommets :



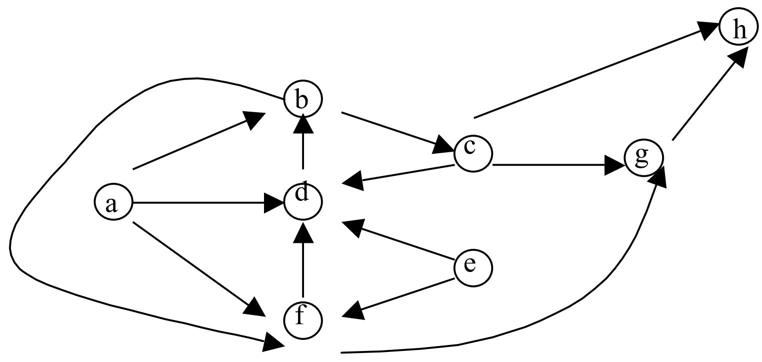
a) A l'aide d'un parcours en largeur, montrer qu'on peut déterminer une numérotation "topologique" des sommets, c'est-à-dire que pour tout arc (x_i, x_j) on ait : $i < j$ (avec $1 \leq i, j \leq n$).

b) Montrer qu'on peut aussi déduire de ce même parcours les plus courts chemins (au sens du nombre d'arcs) issus du sommet A

PARCOURS EN PROFONDEUR D'UN GRAPHE

I

1) Représenter le graphe orienté ci-contre :
   a) Par une matrice.
   b) Par des listes d'adjacence.

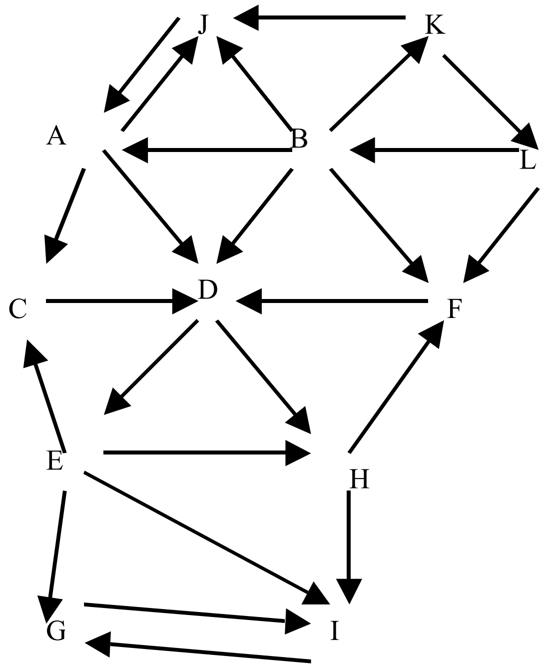


2) En utilisant une structure de pile, effectuer une procédure de recherche en profondeur à partir du sommet a .
   Tracer la "forêt" d'exploration obtenue (c'est-à-dire là où les arborescences (s) associées au parcours).

3) Faire un parcours en profondeur, toujours à partir du sommet a, mais différent du précédent.

II

ALGORITHME DE KOSARAJU-SHARIS : détermination des composantes fortement connexes d'un graphe.



Soit le graphe G = (X, U) ci-contre où :
X = {A, B, …, L}.
1) Par un parcours en profondeur respectant l'ordre lexicographique, déterminer l'ensemble des descendants du sommet A, c'est-à-dire la fermeture transitive de A; Puis reprendre à partir du sommet B le parcours en profondeur (en excluant les sommets déjà visités).

Attribuer un " rang" à chaque sommet qui est le numéro d'ordre de post-visite c'est-à-dire de fin d'exploration, de ce sommet : (ainsi le rang du sommet I égale 1).

2) Soit $G^t = (X, U^t)$ le graphe obtenu à partir de G en inversant tous les arcs de U.

Effectuer un parcours en profondeur sur $G^{t,}$ à partir du sommet de plus fort rang et noter l'arborescence obtenue.

Si tous les sommets n'ont pas été visités, reprendre à partir du sommet de plus fort rang non encore visité (en excluant les sommets déjà visités) et noter l'arborescence obtenue ; et ainsi de suite.

On admettra qu'à chacune des arborescences obtenues dans ce parcours en profondeur de G^t, correspond une composante fortement connexe (et une seule) de G : décrire chacune des composantes fortement connexes de G, puis les ordonner ("mise en ordre" du graphe G).

Quelle est la fermeture transitive de B? de C ? de I ?

3) En inversant le moins possible d'arcs, rendre le graphe fortement connexe.

RECHERCHES ARBORESCENTES.

I

CRYPTARITHMETIQUE

Associer à chaque lettre ci-dessous un chiffre de 0 à 9, de sorte que l'addition soit vérifiée :

$$\begin{array}{rr} & FACE \\ + & A \\ + & FACE \\ \hline & DEBAT \end{array}$$

N.B.à des lettres différentes sont associées des chiffres différents.

II

Un alpiniste peut porter dans son sac-à-dos une charge d'au maximum b = 14kg.
Partant en randonnée, il veut emporter des aliments. Ceux-ci sont conditionnés en boîtes (donc non sécables).
L'alpiniste a le choix entre 4 boîtes différentes (chacune disponible en un seul exemplaire).
Voici le poids et la valeur nutritive de chaque boîte.

Boîte	1	2	3	4
Poids	4	6	8	10
Valeur nutritive	20	27	36	44

Déterminer, par une recherche arborescente, le chargement optimal du sac-à-dos, sachant que l'alpiniste veut maximiser la valeur nutritive de ce chargement (tout en respectant évidemment la contrainte de charge maximale : b = 14 kg).

N.B. Après avoir formulé ce problème avec quatre variables "binaires" (x_j = 0 ou 1), vous commencerez par le résoudre dans le cas où les boîtes seraient sécables.

PROGRAMMATION LINEAIRE : Résolution graphique.

I

Un boulanger désire préparer deux types de crèmes (chocolat ou vanille). Le kilo de crème au chocolat peut être vendu avec un bénéfice de 40 F et le kilo de crème à la vanille avec un bénéfice de 20 F. Chaque crème au chocolat demande 20 minutes de cuisson à feu doux et 4 œufs et chaque crème à la vanille demande 40 minutes de cuisson à feu doux et 1 œuf. Le boulanger dispose de 8 heures de cuisson pour son four et de 30 œufs.

1) Formuler un programme linéaire qui maximise le revenu de ce boulanger.

2) Résoudre graphiquement le programme linéaire obtenu à la question 1.

3) En fait, le boulanger désire que le nombre de crèmes à la vanille représente au plus 60% du total des crèmes préparées.

   Formuler cette nouvelle contrainte. La résolution n'est pas demandée.

II

Composition d'aliments pour le bétail. (modélisation, résolution graphique)

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant, au plus, trois produits bruts : orge, arachide, sésame.

L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et 3,6% de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenues, respectivement dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

Produit brut	1.Orge	2. Arachides	3. Sésame	Pourcentage requis
Pourcentage de protéines	12	52	42	22
Pourcentage de graisse	2	2	10	3,6
Coût par tonne	25	41	39	

1) On notera que xj (j = 1, 2, 3) la quantité de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème algébriquement.

2) Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème. Le résoudre graphiquement.

III

Une raffinerie peut traiter deux pétroles bruts. Par distillation fractionnée dans des "toppings", ces bruts donnent des hydrocarbures variés (gaz, gasoline, benzine, naphta kérosène, gasoil, fuel), qui subissent ensuite des traitements complémentaires (épuration, désulfurisation, crackage, reformage catalytique) pour devenir des "bases" qui convenablement mélangées, permettent d'obtenir les produits commerciaux désirés : ceux-ci sont pour la raffinerie considérée au nombre de trois : les essences, le gasoil, le fuel. pour une tonne de chaque brut, on extrait les quantités suivantes de ces trois produits (les déchets étant négligeables) :

Brut / Produits	N° 1	N°2
Essence	0, 5 tonnes	0, 5 tonnes
Gasoil	0, 2 tonnes	0, 3 tonnes
Fuel	0, 3 tonnes	0, 2 tonnes

La production étant limitée (par la capacité de certaines unités de traitement, par les possibilités de vente et par les stockages disponibles), la raffinerie peut produire au maximum par jour 6 500 tonnes d'essence, 3 000 tonnes de gasoil et 3 600 tonnes de fuel. La raffinerie réalise un profit de 8 unités monétaires par tonnes de brut N° 1 traitée, et de 10 unités monétaires par tonne de brut N° 2.

1) Formuler le problème puis multiplier la première contrainte par 2 et les deux autres par 10.

2) Résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe (méthode algébrique).

PROGRAMMATION LINEAIRE (suite)
Méthode algébrique du simplexe

I

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\text{Max } Z = -2x_1 + 3x_2$$

Résoudre ce programme par la méthode algébrique du simplexe.

II

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{Max } Z = & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{avec} & 8x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & 6x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 8 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Le résoudre par la méthode algébrique du simplexe. Vérifier par la méthode des tableaux

III

Trois marchandises M1, M2, M3 disposent quotidiennement de 4, 7 et 6 tonnes, respectivement d'un certain produit. Ce produit doit être acheminé vers deux hypermarchés H1 et H2 où la demande s'élève chaque jour à 8 et 9 tonnes de ce produit.

Les coûts unitaires de transport (en euros par tonne) sont les suivants :

	H_1	H_2
M_1	10	8
M_2	6	6
M_3	10	4

1) Reconnaître un modèle classique. Quelle solution fournit l'heuristique de BALAS-HAMMER ("Méthode de la différence maximale") ? Donner son coût. Cette solution est-elle optimale ?
2) Soit la solution ci-dessous (fournie par la méthode du Coin Nord-Ouest).

M1 → H1 : 4t ; M2 → H1 : 4t ; M2 → H2 : 3t , M3 → H2 : 6t

Est-elle de base ? Optimale ? Sinon, l'optimiser. L'optimum est-il unique ?

3) On reprend le problème pour le résoudre différemment : formuler le problème à l'aide de variables positives ou nulles : x11, x12, x21, x22, x31, x32 (on écrira cinq contraintes de type égalité et la fonction économique).

On pose x11 = x et x21 = y. Exprimer toutes les autres variables, ainsi que la fonction économique, à l'aide de x et y et traduire leur positivité. Se ramener au cas d'une maximisation.

Résoudre le programme linéaire ainsi obtenu et retrouver l'optimum

PROGRAMMATION LINEAIRE (fin)

méthode des tableaux du simplexe

I

PRODUCTION OPTIMALE D'UN ATELIER (contraintes redondantes et solution économique d'un programme linéaire).Un atelier peut fabriquer trois types d'articles :

L'article A1 à la cadence de 35 objets à l'heure

L'article A2 à la cadence de 45 objets à l'heure.

L'article A3 à la cadence de 20 objets à l'heure;

Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois. Le bénéfice unitaire pour l'article A1 est de 60 F par objet, pour A2 : de 40 F, pour A3 : de 80 F. Ces objets sont vendus en totalité à des grossistes ; on a observé qu'on ne pouvait écouler, par mois, plus de 4 900 objets du type A1, ni plus de 5 400 objets du type A2, ni plus de 2 000 objets du type A3.

D'autre part, chaque objet doit être vérifié avant sa commercialisation ; une équipe de trois techniciens est chargée de cette mission ; chaque technicien travaille 170 heures par mois. La vérification d'un objet du type A1 prend quatre minutes, du type A2 trois minutes, et du type A3 deux minutes;

1) Montrer qu'une contrainte est redondante (c'est-à-dire qu'elle est impliquée par une ou plusieurs autres). Interpréter géométriquement cette redondance.
2) Résoudre par l'algorithme du simplexe (méthode des tableaux) après avoir supprimé la contrainte redondante.

II

UNE PETITE ENTREPRISE qui fabrique des jouets et des maquettes réalise, entre autre la préparation de trois modèles réduits ; robots, avion supersonique et navettes spatiales. Cette préparation s'effectue en trois étapes successives. Le tableau suivant indique le temps nécessaire, en minutes pour chaque modèle, à chaque étape.

Modèle réduit	Robot	Avion	Navette
Etape 1 : Assemblage	3	2	7
Etape 2 : Emballage	6	3	8
Etape 3 : Vérification	2	1	5

L'entreprise peut consacrer au plus, par jour :

- 315 minutes à l'assemblage
- 450 minutes à l'emballage
- 200 minutes à la vérification

Le profit réalisé est de 40 F pour un robot, 25 F pour un avion, 100 F pour une navette.

1) Formuler le programme linéaire qui détermine le programme de préparation procurant un profit maximal (attention les variables sont, ici, entières)
2) Résoudre le problème en supposant les variables continues. (on dit alors qu'on "relâche" les contraintes d'intégrité).

La solution optimale du problème continue est-elle entière ? Que peut-on en conclure pour la résolution du problème en variables entières ?

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

10 Mars 1995

I

Les tâches nécessaires à la construction d'une usine sont décrites ci-dessous :

Code Tâches	Activités correspondantes	Tâches précédentes	Durée en jours
A	Aménagement des voies d'accès	**-**	**5**
B	Fondations	**A**	**10**
C	Construction partie bureau	**B**	**20**
D	Détermination des besoins et commande matériels atelier	**-**	**10**
E	Construction d'un atelier	**B**	**25**
F	Pose fenêtres et portes dans les bureaux	**C**	**5**
G	Electricité atelier	**E**	**3**
H	Délai livraison machines	**D**	**15**
I	Electricité bureaux	**F**	**4**
J	Peinture des sols et murs de l'atelier et des bureaux	**F, G**	**3**
K	Installation machines atelier	**H, J**	**5**
L	Installation matérielle de bureau	**I, J**	**2**
M	Mise au point des machines	**K**	**4**

1)Tracer le graphe PERT en faisant apparaître le chemin critique. Attention aux tâches fictives !

En quel temps minimum ce projet sera-t-il réalisé ?

2) Vérifier par la méthode de MPM.

II

Une société utilise des hélicoptères pour déverser des insecticides sur une région agricole. Elle dispose de 15 hélicoptères répartis dans 3 bases :

Base 1 :	6 hélicoptères
Base 2 :	2 hélicoptères
Base 3 :	7 hélicoptères

La région, trop important à couvrir, a été divisée en 4 districts différents, que l'on a décidé de faire survoler par les nombres suivants d'hélicoptères.

District 1	1 hélicoptère	District 3	7 hélicoptères
District 2	3 hélicoptères	District 4	4 hélicoptères

On connaît le temps mis par un hélicoptère pour effectuer sa mission suivant la base d'où il décolle et le district qu'il doit survoler :

District

Base		D1	D2	D3	D4
	B1	2	4	3	3
	B2	6	2	6	4
	B3	6	6	7	6

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

1) Donner la solution obtenue par la méthode du coin Nord-Ouest; Montrer qu'elle est de base et évaluer son coût. NB : on ne demande pas de tester son optimalité.
2) Etablir un programme de transport visant à minimiser le temps total de vol des hélicoptères par la méthode BALAS- HAMMER (heuristique de la différence maximale) et donner son coût. La solution obtenue est-elle optimale ? Sinon l'optimiser.

3) Comparer les deux méthodes.

4) L'optimum est-il unique ? Sinon donner une autre solution optimale.

III

Une unité de production de l'entreprise AUDIOSTAR fabrique deux types de produits "grand public" :

- des autoradios
- des lecteurs de cassettes

La fabrication de ces produits requiert le passage par trois ateliers, dont les disponibilités (en temps) sont exprimées par le tableau suivant :

▪ Assemblage des composantes	70 heures
▪ Vérification et réglages	40 heures
▪ Emballage	50 heures

Les temps de passage dans chaque atelier pour chaque produit sont données ci-dessous :

	Autoradios	lecteurs de cassettes
▪ Assemblage	3 minutes	4 minutes
▪ Vérification	1 minute	3 minutes
▪ Emballage	2 minutes	2 minutes

Le bénéfice réalisé sur chaque produit est :

- 40 Francs par autoradios
- 60 Francs par lecteur de cassettes

On désire déterminer le programme de production maximisant le bénéfice global.

1) En introduisant deux variables x1 et x2 dont on donnera la signification concrète formuler le problème en tant que programme linéaire. NB : se ramener à la minute comme unité de temps.

2) a) Résoudre graphique ment (unité : 200 unités = 1 centimètre)

2) b) Montrer qu'une contrainte est redondante.

3) Après avoir éliminé cette contrainte redondante, résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe (méthode des tableaux ou méthode algébrique du simplexe).

Examen de 8 septembre 1995

I

La consommation de bière en France continuant sa progression, une petite brasserie veut lancer deux nouveaux types de bières : BRUNE TOP (brune) et BLONDIE (blonde).

Ces bières sont produites à l'aide de trois matières premières : malt, houblon, maïs.

Le tableau ci-dessous donne les quantités de ces matières premières nécessaires pour fabriquer un tonneau de BRUNE TOP ou de BLONDE, ainsi que les stocks disponibles de ces matières premières (pour une journée standard de production) :

	MALT	HOUBLON	MAÏS
BRUNE TOP	20 kg	0,25 kg	15 kg
BLONDIE	356 kg	0,25 kg	5 kg
STOCK DISPONIBLE	1 190 kg	10 kg	480 kg

Le bénéfice réalisé sur la vente d'un tonneau de BRUNE TOP est de 4 unités monétaires : celui d'un tonneau de BLONDIE est de 2 u. m.

Toute la production est écoulée.

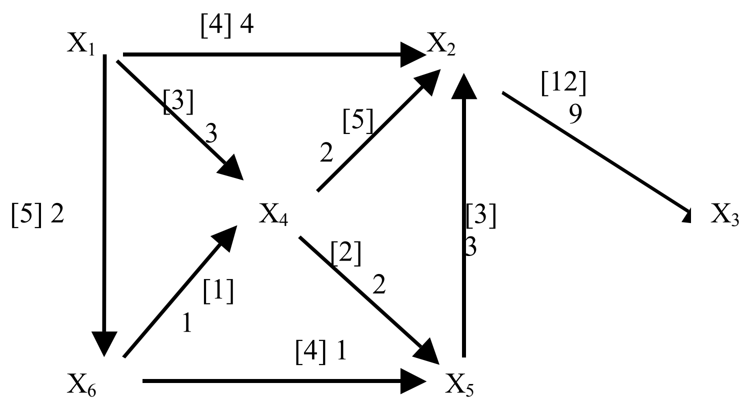
1) Formuler le problème à l'aide de deux variables x_1 et x_2, sachant que la brasserie désire maximiser son bénéfice global..

2) Diviser par 5 chaque membre de la contrainte concernant le MALT ; faire de même pour celle concernant le MAÏS. Multiplier par 4 chaque membre de la contrainte concernant le HOUBLON.

Résoudre alors graphiquement le problème. Echelle : 2 cm pour 10 unités (tonneaux)

3) Résoudre le PL obtenu au 2 – par l'algorithme du simplexe.

II



Soit le réseau de transport ci-dessus, avec le flot indiqué. La source est X_1, le puits est X_3.

Sur chaque arc on a donné : entre crochets, la capacité de l'arc suivie de son flux.

Recopier le graphe et indiquer les graphes les arcs saturés.

Déterminer, à l'aide de l'algorithme approprié, si ce flot est maximal. Sinon, l'optimiser.

Détailler la rédaction.

Donner une coupe minimale et l'interpréter concrètement.

III

1 Pour le graphe du II – donner la représentation par la liste des successeurs, avec les deux tableaux :

i	
d_i^+	

i	
ext (j)	

Rappel :

d_i^+ désigne le nombre d'arcs ayant le sommet xi comme extrémité initiale.

Le tableau ext(j) liste, dans l'ordre lexicographique, les extrémités terminales des arcs issus du sommet 1 (noté aussi X_1), puis celle du sommet $2(X_2)$,…etc.

2. Un graphe étant donné à l'aide de cette représentation, rappeler comment on peut le tracer.

IV

Par un parcours en profondeur du graphe ci-dessus, à partir du sommet X_1, déterminer pour chaque sommet X_i $_i$ l'ensemble des descendants de X_i (fermeture transitive de X_i).

NB: Cette démarche de détermination de la fermeture transitive est valable pour tout graphe sans circuit (admis).

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

9 Février 1996

EXERCICE I

Un automobiliste désire se rendre de la ville A à la ville F dans un délai minimum. La Figure 1 donne les durées, exprimées en minutes, des parcours entre les villes directement reliées.

Question 1 *Montrer que pour résoudre son problème, l'automobiliste doit déterminer un plus cours chemin (au sens du temps) dans un graphe ORIENTE et valué que vous dessinerez.*

Question 2 *Dites pour quelles raisons l'automobiliste peut résoudre son problème en utilisant l'algorithme de Dijkstra.*

Question 3 *Appliquez l'algorithme de Dijkstra orienté que vous aurez déduit du graphe non orienté ci-dessous :*

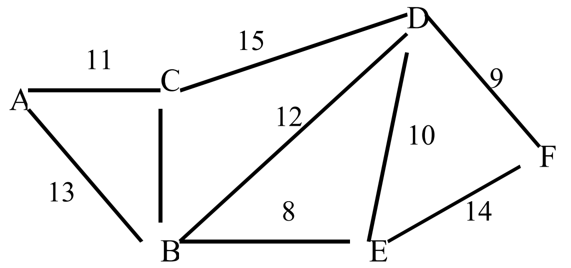


Figure 1 :

EXERCICE II

Une entreprise désire installer à moindre coût un réseau informatique connectant l'ensemble de ses ordinateurs. Les ordinateurs n'étant pas tous compatibles l'établissement d'une connexion directe entre deux machines n'est pas toujours réalisable; La figure 2 fournit, lorsqu'une connexion directe est possible, le coût d'installation en milliers de francs (logiciel et matériel) d'une liaison entre les différentes machines (par exemple le coût d'installation d'une connections entre la machine A et la machine B est de 5 Kf, il n'y a pas de connexion possible entre les ordinateurs A et C).

A	B	C	D	E	F	G	H	
●	5	●	6	3	●	4	10	1A
	●	4	●	●	●	4	6	B
		●	3	2	7	●	●	C
			●	5	●	●	7	D
				●	6	●	●	E
					●	2	●	F
						●	4	G
							●	H

Figure 2 : coûts d'installation des connexions

Question 4 *Quel problème l'entreprise doit-elle résoudre ? Donnez un algorithme résolvant ce problème.*

Question 5 *Tracez à grande échelle le graphe sur lequel l'algorithme s'appliquera.*

Question 6 *Appliquez cet algorithme au graphe que vous avez dessiné.*

EXERCICE III

Un horticulteur cultive deux sortes de roses : des roses rouges et des roses blanches; La serre qu'il utilise lui permet de cultiver au plus 3 000 roses sur la période de référence. Les frais de production d'une rose rouge sont de 1 €, ceux d'une rose blanche 1, 5 €. Le budget dont il dispose pour couvrir les frais de production est d'au plus 4 000 €. Un couple de fleuristes se propose de lui acheter toute sa production au prix de 2, 5 € par rose rouge et de 3, 5 € par rose blanche. Combien de roses rouges et de roses blanches notre horticulteur doit-il produire pour maximiser son bénéfice : prix de vente - coût de production ?

Question 7 *en notant x_1 le nombre de roses rouges produites et par x_2 celui des roses blanches, montrer que l'horticulteur doit résoudre un programme linéaire que vous donnerez (pour simplifier les calculs, il est recommandé de multiplier par 5 l'une des inégalités, et par 10 les coefficients de la fonction économique traduisant le bénéfice global = chiffre d'affaires – frais de production.*

Question *8* *Résoudre géométriquement ce programme linéaire (échelle 1 000 roses = 2 cm)*

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

6 septembre 1996

EXERCICE I Un agriculteur peut utiliser 2 engrais E1 et E2 pour fertiliser ses terres. Il sait que celles-ci, par hectare et par an, supportent au maximum 80 kg de potasse et 90 kg de nitrates (vive l'agriculture biologique !). L'engrais est conditionné sous forme de sacs contenant outre un produit neutre :

- pour E1 : 1 kg de potasse et 3 kg de nitrates

- pour E2 : 2 kg de potasse et 1kg de nitrates.

De l'utilisation de chaque sac de E1, il attend un bénéfice de 300 F: de celle de E2, 200 F(compte-tenu aussi du travail qu'il accomplit).

Pour indiquer à cet agriculteur – qui veut maximiser son bénéfice – comment fertiliser chaque hectare de ses terres, vous utiliserez l'algorithme du simplexe.

Vérifier graphiquement votre solution.

EXERCICE II Soit le graphe G = (X, U) de n = 5 sommets – indicés de I = 1 à I = 5) et de m = 7 arcs (indicés de J = 1 à J = 7), défini par les deux tableaux suivants :

Dans le premier tableau, NARC (I) désigne le demi-degré extérieur de sommet I (nombre d'arcs ayant le sommet i comme extrémité initiale).

I	1	2	3	4	5
NARC (I)	2	0	1	2	2

-Dans le second tableau EXTR(J), on a listé d'abord tous les successeurs du sommet 1, puis ceux du sommet 2, etc (s'ils existent). Ainsi, EXTR(J) désigne l'indice du sommet qui est l'extrémité terminale de l'arc numéroté J (rappel : on a numéroté les arcs en commençant par ceux issus du sommet 1, puis ceux issus du sommet 2, du sommet 3, etc…);

J	1	2	3	4	5	6	7
EXTR(J)	3	5	2	1	5	2	3

0) Comment peut-on déterminer, par simple inspection des deux tableaux ci-dessus, si G comporte une entrée ? Une sortie ?

En outre, l'arc J a la capacité CAPA (J) :

J	1	2	3	4	5	6	7
CAPA (J)	6	3	2	7	2	6	4

1) Tracer le graphe G (en disposant les sommets le mieux possible pour que le tracé soit bien lisible) et prouver qu'il s'agit d'un réseau de transport.

NB : noter chaque capacité entre crochets : il est inutile de reporter sur chaque arc son numéro. Tout sommet d'indice k sera noté obligatoirement : x_k.

2) a) Vérifier que le tableau FLUX (J) qui donne la valeur du flux circulant sur l'arc J, définit bien un flot dans ce réseau de transport.

I	1	2	3	4	5	6	7
FLUX (J)	0	3	2	3	2	3	2

On représentera tout arc saturé par un trait double;

b) Donner la valeur de ce flot. Est-il complet ?

c) Est-il optimal ? Sinon l'améliorer (on utilisera impérativement l'algorithme étudié en cours) et retracer le graphe.

d) Donner la coupe minimale associée au flot maximal et rappeler sa signification concrète.

III

Retracer le graphe G (tracé au II)1 sans orientation des arcs. On interprète ici la capacité de chaque arc comme un coût.

Déterminer un l'arbre de coût minimal dans G, en appliquant un algorithme du cours.

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

21 FEVRIER 1997

EXERCICE I

Un livreur de pizza doit livrer une commande dans un délai de 10 minutes. Beaucoup de rues étant en sens unique, chaque arc du graphe représenté par la Figure 1 indique la direction et la durée, exprimée en minutes, des trajets entre les différents carrefours de son arrondissement. La société fabriquant les pizzas se situe au sommet A du graphe et la livraison doit s'effectuer au sommet H.

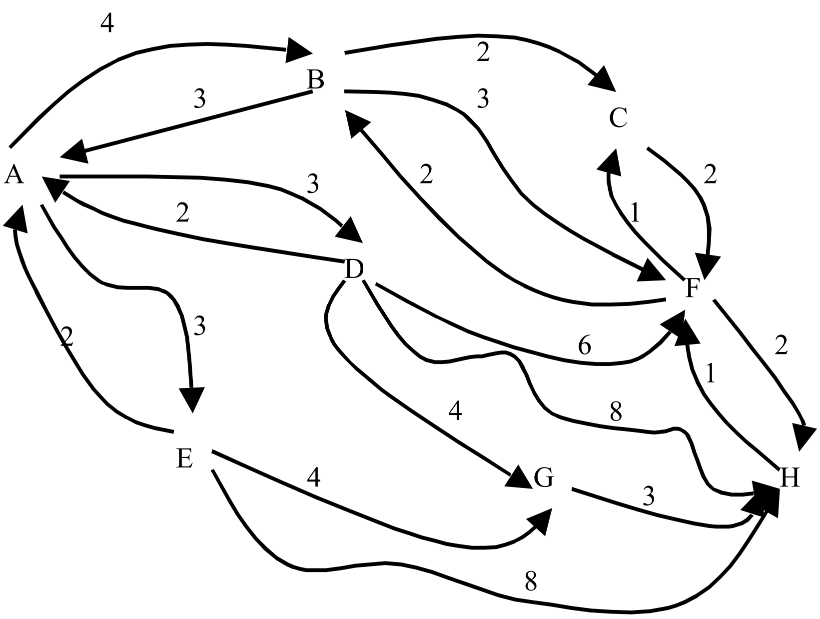


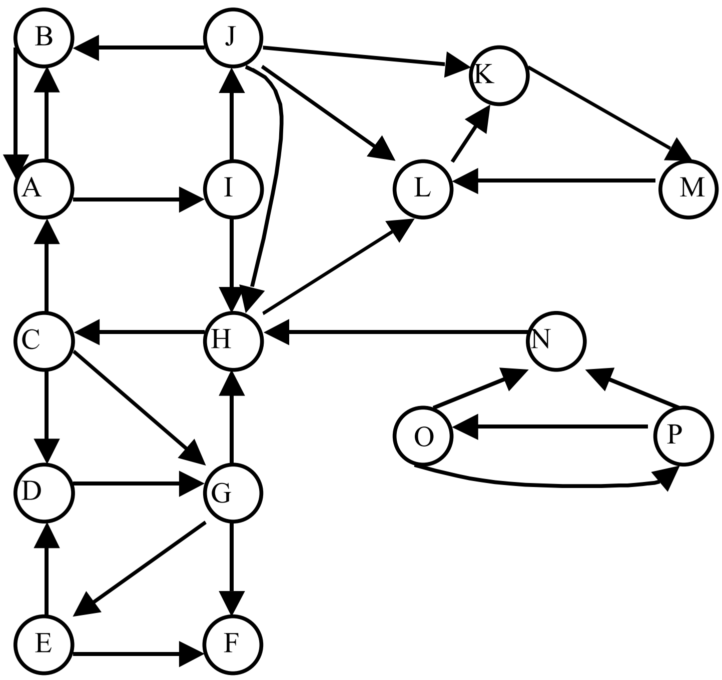
Figure 1 :

Question 1 *Dites pour quelles raisons le livreur peut résoudre son problème en utilisant l'algorithme de Dijkstra.*

Question 2 *Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe représenté par la figure 1.Le livreur arrivera-t-il à temps ?*

EXERCICE II

Par un parcours en profondeur du graphe ci-dessous déterminez la fermeture transitive du sommet a : $\hat{\Gamma}^{+}(a)$ (ensemble de sommets comprenant a et les descendants de a).



EXERCICE III

Un paysan peut élever deux types de vaches : A et B, qu'il nourrit avec du foin, de l'orge et de l'herbe. Une vache de type A consomme par jour : 3 kg de foin, 0,3 kg d'orge, 10 kg d'herbe.

Une vache de type B consomme par jour : 2kg de foin, 0,8kg d'orge, 11kg d'herbe.

Le stock d'aliments est limité notamment par la capacité des hangars. La quantité de foin consommée par jour ne peut dépasser 300 kg, celle d'orge 48 kg et celle d'herbe 1650 kg.

Sachant que le rapport d'une vache A ou B est de 1000 Euros net, l'éleveur voudrait savoir combien il doit élever de vaches de type A et de type B pour maximiser son profit (en l'absence de subvention de la Communauté européenne).

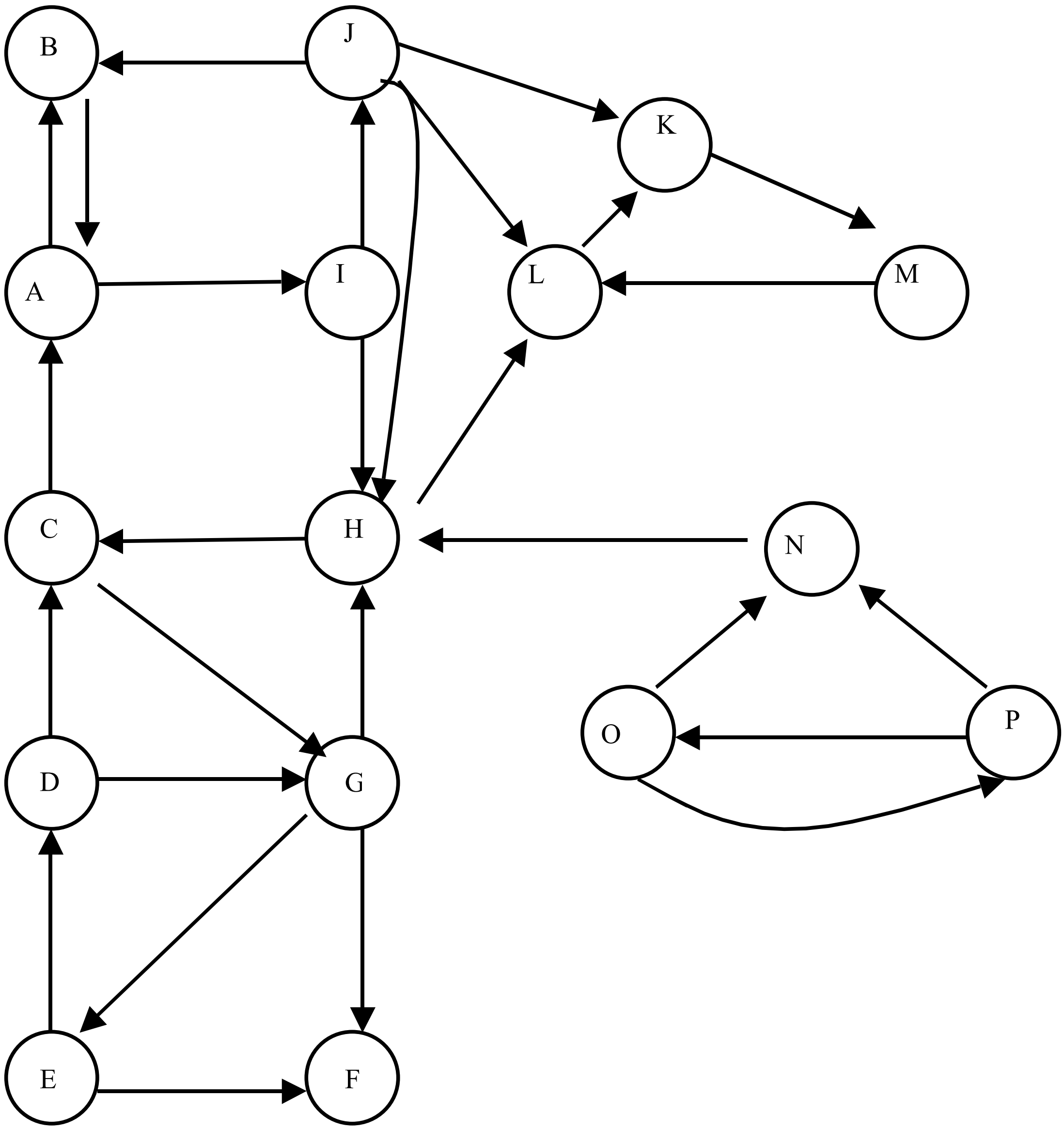
Question 1 *Indiquer la signification concrète de variable à introduire pour formuler le problème. Ecrire les inéquations exprimant les contraintes liées aux stocks de nourriture, ainsi que la fonction économique.*

Question 2 *Résoudre graphiquement le problème (échelle : 1 cm = 10 vaches). Donner en clair les valeurs des variables et de fonction économique à l'optimum.*

A l'optimum, quelle est la quantité d'orge consommée par les vaches de type A ? de type B ?

Montrer sur le graphique que l'une des contraintes est redondante.

Question 3 *Résoudre par l'algorithme du simplexe après avoir obligatoirement supprimé la contrainte redondante et multiplié chaque membre de la 2ème contrainte par 10 (avant d'y introduire un variable d'écart).*


B
J
K
A
I
L
M
C
H
N
D
G
O
P
E
F

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

25 AVRIL 1997

EXERCICE I

Un fromager fabrique deux sortes de fromages : des fromages à croûtes rouges et des fromages à croûte blanche. La cave qu'il utilise lui permet de produire au plus 3000 fromages par an. Les coûts de production d'un fromage à croûte rouge sont de 1 € et ceux d'un fromage à croûte blanche de 1, 5 €. Le budget dont il dispose pour cette production est d'au plus 4 000. Une coopérative se propose de lui acheter toute sa production au prix de 2,5 € par fromage à croûte rouge et de 3, 5 € par fromage à croûte blanche. Combien de fromages à croûte rouge et de fromages à croûte blanche ce fromager doit-il produire pour maximiser son bénéfice global (prix de vente – coût de production) ?

Question 1 *En notant x_1 le nombre de fromages à croûte rouge produits et par x_2 celui des fromages à croûte blanche, montrer que le fromager doit résoudre un programme linéaire que vous donnerez.*

Question 2 : *Résoudre géométriquement ce programme linéaire (échelle 1 000 fromages = 4cm)*

Question 3 *Résoudre ce programme linéaire par la méthode des tableaux du simplexe.*

EXERCICE II

Soit le graphe G = (X, U) de n = 5 sommets (indicés de I = 1 à I = 5) et de m = 7 arcs (indicés de J = 1 à J = 7), défini par les deux tableaux suivants :

- Dans le premier tableau, NARC (I) désigne le demi-degré extérieur du sommet I (nombre d'arcs ayant le sommet I comme extrémité initiale).

I	1	2	3	4	5
NARC (I)	2	0	1	2	2

- Dans le second tableau EXTR(J), on a listé tout d'abord tous les successeurs du sommet 1, puis ceux du sommet 2, etc…(s'ils existent). Ainsi, EXTR(J) désigne l'indice du sommet qui est l'extrémité terminale de l'arc numéroté J (rappel : on a numéroté les arcs en commençant par ceux issus du sommet 1, puis ceux issus du sommet 2, du sommet 3, etc).

J	1	2	3	4	5	6	7
EXTR(J)	3	5	2	1	5	2	3

- En outre, l'arc J a la capacité CAPA(J) :

J	1	2	3	4	5	6	7
CAPA(J)	6	3	2	7	2	6	4

1) Tracer le graphe G (en disposant les sommets le mieux possible pour que le tracé soit bien lisible), et prouver qu'il s'agit d'un réseau de transport.

NB : Noter chaque capacité entre crochets ; il est inutile de reporter sur chaque arc son numéro. Noter les sommets : $x_1, x_2, \ldots, x_5$.

2) a) Vérifier que le tableau FLUX(J), qui donne la valeur du flux circulant sur l'arc J, définit bien un flot dans ce réseau de transport :

J	1	2	3	4	5	6	7
FLUX(J	0	3	2	3	2	3	2

2) b) Donner la valeur de ce flot. Est-il complet ?

2) c) Est-il optimal ? Sinon l'améliorer (on utilisera impérativement l'algorithme étudié au cours).

2) d) Donner la coupe minimale associée au flot maximal et rappeler sa signification concrète.

3) Par un parcours en profondeur à partir du sommet x_4, déterminer, l'ensemble des descendants de chaque sommet x_i (soit : $\hat{\Gamma}^{+}(x_i)$).

NB : On commencera par redessiner le graphe (en mettant les capacités et les flux). Donner aussi pour chaque sommet son numéro de première visite (ou "prévisite"), et celui de dernière visite (ou"postvisite").

6 FEVRIER 1998

EXERCICE I (8 points)

Un agriculteur peut utiliser deux types d'engrais E1 et E2 pour fertiliser ses terres : il sait que celles-ci requièrent par hectare et par an, au moins 60 kg de potasse, 120 kg de calcium et 90 kg de nitrates. L'engrais est disponible sous forme de paquets contenant, en plus d'un produit neutre :

Pour E1 : 1 kg de potasse, 3 kg de calcium et 3 kg de nitrates.

Pour E2 : 2 kg de potasse, 2 kg de calcium et 1 kg de nitrates.

Chaque paquet de E1 ou E2 coûte 12 unités monétaires. Le but est d'indiquer à cet agriculteur comment fertiliser, au moindre coût, chaque hectare de ses cultures.

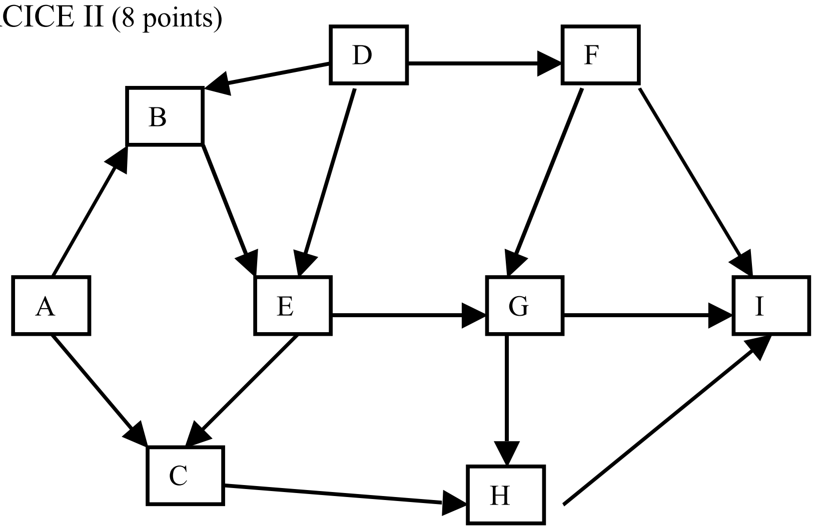
1. Formuler le problème en termes de programme linéaire ; on introduira les variables convenables et on donnera leur signification concrète (on omettra le fait que ces variables sont entières). Donner le premier tableau de la résolution par l'algorithme du simplexe (ne pas poursuivre les itérations).
2. Résoudre graphiquement ce programme linéaire.
3. On peut associer au problème de l'agriculteur, un autre programme linéaire (appelé "dual") qui s'écrit ainsi :

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & \square & 12 \\ 2y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \square & 12 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0 \\ \max 60\, y_1 & + & 120\, y_2 & + & 90\, y_3 & & \end{array}$$

Introduire des variables d'écart $y_{\bar{1}}$ et $y_{\bar{2}}$, puis résoudre ce "dual" par l'algorithme du simplexe (méthode des tableaux). On admettra qu'à l'optimum de ce "dual", $\square_{\bar{1}}$ et $\square_{\bar{2}}$ représentent, au signe près, les quantités optimales de E1 et E2 à utiliser par l'agriculteur : le vérifier ici.

4. Pour des raisons commerciales, le fournisseur d'engrais décide, désormais, de faire une réduction de 10 % à tout agriculteur utilisant le même nombre de paquets de E1 et E2 à l'hectare. En quoi la solution trouvée ci-dessus est-elle modifiée ? Raisonner graphiquement.

EXERCICE II (8 points)



Soit le graphe G = (X,U) ci-dessus.

1)a) Par un parcours en profondeur, déterminer les descendants du sommet A (i.e. la fermeture transitive du sommet A)*

1)b) Donner le numéro d'ordre de prévisite ainsi que celui de post visite pour tout descendant de A.

2)a) Le graphe G est sans circuit : comment peut-on s'en assurer ?

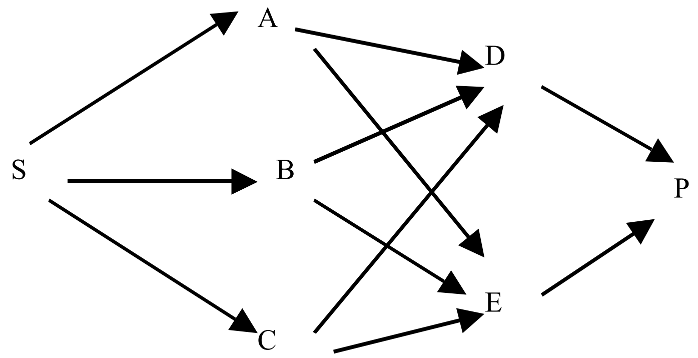
2)b) Déterminer les entrées de G.

2)c) Par un parcours en largeur, trouver une numérotation des sommets telle que pour tout arc (i, j) on ait : i < j.
On donnera tous les états (10) de la file associée.

(*) Vous tracerez SOIGNEUSEMENT le graphe, à grande échelle, et vous illustrerez –en détail- sur ce graphe le parcours en profondeur. Donner aussi tout les états de la **pile** associée à ce parcours.

EXERCICE III (4 points)

Soit le réseau de transport ci-dessous ; les capacités des arcs et des flux sont indiquées dans le tableau ci-dessous :



arc	capacité	flux
sA	16	16
sB	20	16
sC	20	12
AD	16	16
AE	04	0
BD	20	8
BE	08	8
CD	12	0
CE	12	12
Dp	24	24
ED	01	0
Ep	28	20

Ce flot est-il optimal ? Sinon l'optimiser. Indiquer une coupe minimale. Sur le graphe, on notera les capacités en crochets.

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

12 JUIN 1998

EXERCICE I

Une PME commercialise des aliments pour le bétail, de deux types : A1 et A2.
Ces aliments sont obtenus en mélangeant deux sortes de céréales : C1 et C2, dont les stocks respectifs sont de 18 000kg et 10 000kg.

Les aliments A1 et A2 sont conditionnés en sacs de 40 kg.

Chaque sac de A1 comporte 20 kg de C1 et 20 kg de C2

Chaque sac de A2 comporte 30 kg de C1 et 10 kg de C2.

La vente de A1 rapporte un bénéfice de 5 € par sac ; celle d'un sac de A2, 3€.

Sachant que cette PME écoulera tous les aliments ainsi conditionnés, établir un plan de production maximisant son bénéfice global :

Question 1 *Formuler le problème à l'aide de deux variables.*

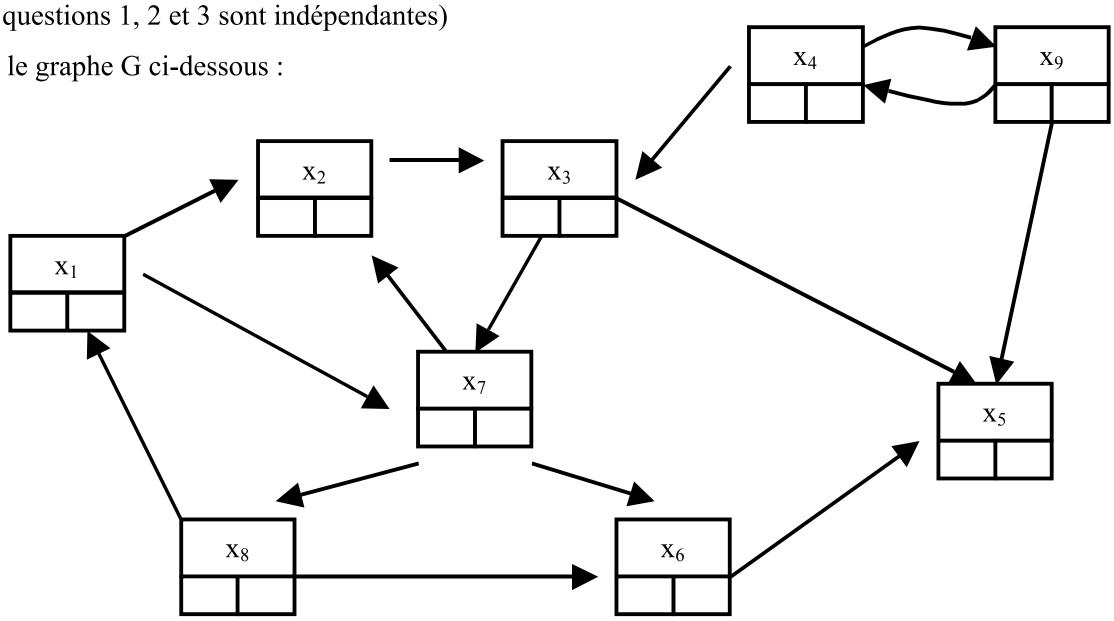
Question 2 *Résoudre par l'algorithme du simplexe (diviser chaque contrainte par 10, avant d'y introduire une variable d'écart).*

Question 3 *Vérifier par une résolution graphique (échelle : 1 cm = 1 000 sacs) employant explicitement la fonction économique.*

EXERCICE II

(les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes)

Soit le graphe G ci-dessous :



EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

Question 1 *Numéroter lexicographiquement les arcs (ainsi l'arc (x_1, x_2) est u_1, puis (x_1, x_7) est u_2, puis (x_2, x_3) est u_3, etc.*

Donner la représentation de ce graphe par deux tableaux :

i	- - -
d_i^+	

j	- - -
ext j	

Dans le premier tableau d_i^+ désigne le demi-degré extérieur du sommet x_i. Rappeler la valeur de $\sum d_i^+$, où la sommation est étendue à tous les sommets de G.

Dans le second tableau, ext j désigne l'extrémité terminale de l'arc u_j (rappel : les arcs ont été numérotés lexicographiquement comme ci-dessus).

Rappeler l'avantage de cette structure de données.

Question 2 a) *Par un parcours en profondeur, déterminer la fermeture transitive du sommet x_1 : chaque fois que vous aurez le choix dans ce parcours entre 2 sommets, prendre celui du plus petit indice.*

Associer à chaque sommet son numéro d'ordre de pré-visite (à écrire dans la case sud ouest du carré associé au sommet) et son numéro d'ordre de post-visite (case sud-est).

Vous tracerez, à part sur votre copie, l'arborescence de ce parcours ; Donner tous les états de la pile associé à ce parcours.

Question 2 b) En vous aidant de ce parcours déterminer :

- si G est connexe ?
- Si G est fortement connexe ?
- Si G comporte un chemin hamiltonien ?

Question 3 *Tracer le graphe **non orienté** associé à G ; chaque sommet x_i sera représenté seulement par :*
x_i*, au lieu du carré précédent.*

On value toute arête [x_i, x_j] par la somme i + j (ainsi l'arête [x_3, x_5] est valuée par 8). Déterminer, par un algorithme du cours, un arbre de valeur minimale. Est-il unique ?

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

12 FEVRIER 99

EXERCICE I

Une entreprise anglaise de confection fabrique deux sortes d'imperméables (vêtements très usités dans ce pays) : ceux du type A sont nettement de meilleure qualité que ceux du type B.

Pour chaque imperméable confectionné et vendu à un grossiste, le bénéfice est de 30 € pour le type A et de 20 € pour le type B.

Il est inutile de confectionner plus de 400 imperméables du type A (car on ne pourrait pas en vendre plus) ; par contre, pour le type B, on n'a pas de contrainte de ce type.

L'approvisionnement en tissus de l'atelier ne permet pas de produire plus de 800 imperméables, au total, par jour.
L'atelier travaille 50 h par semaine ; il ne peut fabriquer à la fois qu'un seul type d'imperméables (pas de "parallélisme" !) : à la vitesse de 10 par heure pour ceux du type A, et 20 par heure pour B.

Question 1 *Formuler le problème (2 variables, 3 contraintes explicites) et chasser le dénominateur dans la contrainte liée à la limitation à 50 heures de travail par semaine.*

Question 2 *Résoudre par la méthode des tableaux (2 itérations).*
NB : lors de la 1ère itération, contrairement au premier critère de Dantzig, faire entrer x_2 en base.

Question 3 *Interpréter concrètement la nullité des variables hors-base, à l'optimum.*

Question 4 *Vérifier graphiquement l'échelle : 1 cm pour 10 imperméables. Représenter le domaine admissible et expliquez comment vous utilisez la fonction économique dans cette résolution graphique.*

EXERCICE II

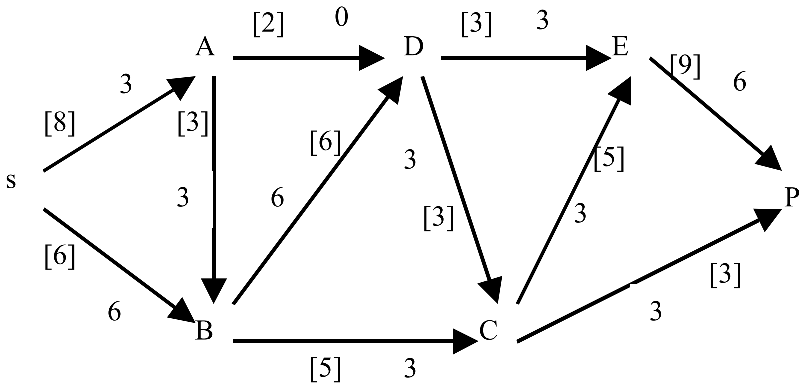


Figure1

Nous considérons le réseau de transport donné dans la figure 1 où l'on cherche à déterminer un flot de valeur maximale de la source s au puits p. Les capacités des arcs sont inscrites entre crochets ; les flux figurent à côté (sans crochets).

Question 1 : *Vérifier que les flux donnés forment un flot. Déterminer la valeur de ce flot.*

Question 2 *Le flot donné est-il optimal ? Si non, déterminer la valeur d'un flot maximal.*

EXERCICE III

Un éditeur littéraire décide de lancer la fabrication du nouveau roman d'un auteur à succès. Pour cela il doit impérativement organiser un certain nombre d'opérations dont les durées et les contraintes de succession sont données dans le tableau suivant :

Opération	durée	antériorité
A : Signature du contrat	1 jour	sans
B : Mise en forme du texte	2 jours	A
C : Choix de l'imprimeur	1 jour	A
D : Photographie du romancier	1 jour	A
E : Maquette de la couverture	1 jour	B et D
F : Impression du texte	2 jours	B et C
G : Fabrication de la couverture	1 jour	C et E
H : Brochage	1 jour	F et G
I : Promotion publicitaire	3 jours	E
J : Livraison	2 jours	H
K : Mise en place dans les librairies	1 jour	I et J

Question 3 *A l'aide de la méthode des potentiels déterminer le délai minimal de parution du roman en librairie.*

Question 4 *Vérifier le résultat de la question 3 à l'aide de la méthode PERT. Vous ferez attention aux tâches fictives.*

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5
11 JUIN 99

EXERCICE I **(10 points)**

Une entreprise liée à l'agriculture peut commercialiser 2 types d'aliments pour le bétail, A1 et A2, obtenus en mélangeant des tourteaux de soja, du maïs et un " excipient ". L'excipient est un produit neutre disponible en quantité illimitée.
Pour la période considérée on dispose de :
1 600 kg de tourteaux de soja et de 1 800 kg de maïs.

Chaque aliment est conditionné en sac de 100 kg comme suit :

Pour A1 :
20 kg de tourteaux de soja, 60kg de maïs, 20 kg d'excipient.

Pour A2 :
40 kg de tourteaux de soja, 20kg de maïs, 40 kg d'excipient.

Le bénéfice tiré de la vente de chaque sac d'aliment A1 est 60 F (respectivement 40 F pour A2). Tous les sacs conditionnés sont vendus.

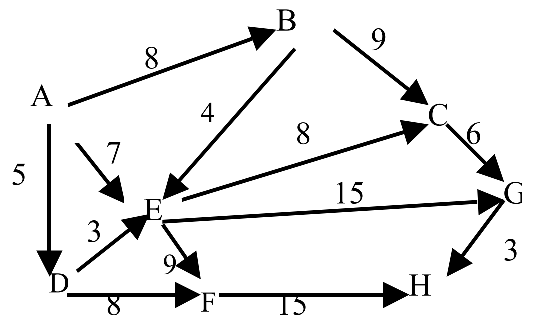
L'entreprise souhaite maximiser son bénéfice.

1) Formuler le problème en termes de programme linéaire (deux contraintes explicites). On divisera OBLIGATOIREMENT chaque contrainte explicite par 20. (Ceci avant introduction de variables d'écart).

2) Résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe ; donner **en clair** l'optimum et son coût.

3) Vérifier graphiquement **en employant explicitement la fonction économique** (échelle : 1 cm pour 10 sacs)

EXERCICE II (10 POINTS)



Une société parisienne doit livrer une commande dans un délai de 25 minutes. Beaucoup de rues étant en sens unique, chaque arc du graphe représenté par la Figure 1 indique la direction et la durée, exprimée en minutes, des trajets entre les différents croisements des itinéraires possibles. La société est située au sommet A du graphe et la livraison doit s'effectuer au sommet H.

Question 1 *Dites pour quelles raisons le livreur peut résoudre son problème en utilisant l'algorithme de Dijkstra.*

Question 2 *Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe représenté par la Figure 1. Vous indiquerez le sommet exploré à chaque étape ainsi que les valeurs associées à chaque sommet.*
La commande arrivera-t-elle à temps ?

Question 3 *Effectuez un parcours en profondeur à partir du sommet A, pour le graphe ci-dessus :*
Lorsque vous aurez le choix entre plusieurs sommets, toujours les prendre dans l'ordre lexicographique.
Donner pour chaque sommet son numéro d'ordre de prévisite (ou " ouverture "à, ainsi que son numéro d'ordre de postivisite (ou " fermeture "). *Tracer l'arborescence du parcours et donner tous les états de la pile associée.*

Question 4 *(facultatif) Comment se traduit l'absence de circuit dans ce graphe, lorsqu'on effectue le parcours en profondeur ?*

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

25 FEVRIER 2000

EXERCICE I

Une entreprise décide d'agrandir son siège social. Pour cela elle doit impérativement organiser un certain nombre d'opérations dont les durées et les contraints de succession sont données dans le tableau suivant :

Opération	Durée	Antériorité
A : Permis de construire	30 jours	sans
B : Terrassement	2 jours	A
C : Fondations	3 jours	B
D : Maçonnerie	5 jours	C
E : Portes et fenêtres	2 jours	D
F : Charpente	4 jours	D
G : Couverture	3 jours	F
H : Plomberie	3 jours	D
I : Electricité	4 jours	G.E
J : Peintures	5 jours	H.E.I
K : Inauguration	1 jour	J

Question 1 *A l'aide de la méthode des potentiels déterminer la date à laquelle l'inauguration pourra se faire au plus tôt.*

Question 2 : *Déterminer l'ensemble des tâches critiques.*

Question 3 *Tracer un graphe PERT correspondant à ce projet.*

EXERCICE II

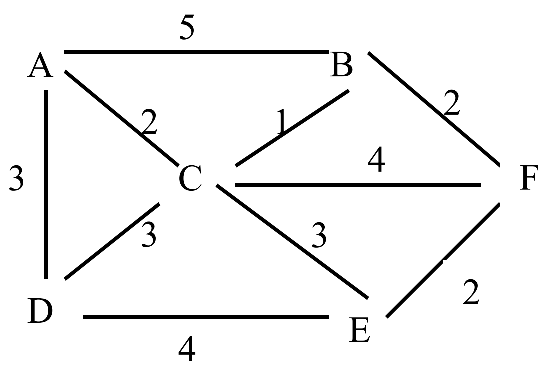


figure 1

Une administration doit installer un nouveau réseau informatique dans l'un de ses bâtiments comportant 6 bureaux. Le graphe représenté en la figure 1 donne les différentes possibilités de connexion entre les bureaux ainsi que les coûts d'installation correspondants. Ainsi l'arête [A; B] modélise le fait qu'une connexion directe peut être installée entre les bureaux A et B. Le coût d'installation de cette connexion est 5 unités monétaires.

Question 4 *Sachant que tous les bureaux doivent être reliés entre eux (pas nécessairement directement), déterminer quel problème d'optimisation doit résoudre l'administration pour installer le réseau de la manière la plus économique.*

Question 5 *Appliquer un algorithme approprié pour trouver le réseau de coût minimal que l'administration souhaite installer. Tracer en clair le réseau obtenu.*

EXERCICE III

Soit le programme linéaire ci-dessous :

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & \geq & 0, & x_2 \geq & 0
\end{array}
$$

Question 6 *Résoudre ce programme linéaire par l'algorithme du simplexe (méthode des tableaux).*

Question 7 : *Faire une vérification graphique*. Vous expliciterez l'utilisation de la fonction économique.

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

9 JUIN 2000

EXERCICE I

Une société utilise des hélicoptères pour déverser des insecticides sur une région agricole. Elle dispose de 15 hélicoptères répartis dans 3 bases :

Base 1 : 6 hélicoptères
Base 2 : 2 «
Base 3 : 7 «

La région, trop importante à couvrir, a été divisée en 4 districts différents, que l'on a décidé de faire survoler par les nombres suivants d'hélicoptères :

District 1 1 hélicoptère
District 2 3 hélicoptères
District 3 7 hélicoptères
District 4 4 hélicoptères

On connaît le temps mis par un hélicoptère pour effectuer sa mission suivant la base d'où il décolle et le district qu'il doit survoler :

District

		D1	D2	D3	D4
	B1	2	4	3	3
BASE	B2	6	2	6	4
	B3	6	6	7	6

1) Donner la solution obtenue par la méthode du coin Nord-Ouest. Montrer qu'elle est de base et évaluer son coût . NB : on ne demande pas de tester son optimalité.
2) Etablir un programme de transport visant à minimiser le temps total de vol des hélicoptères par la méthode BALAS-HAMMER (heuristique de la différence maximale) et donner son coût. La solution obtenue est-elle optimale ? Sinon l'optimiser.
3) Comparer les deux méthodes.
4) L'optimum est-il unique ? Sinon donner une autre solution optimale.

EXERCICE II

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 96 \\ x_1 + x_2 \le 40 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 238 \\ x_1 \ , \ x_2 \ \geq \ 0 \\ 13x_1 + 23x_2 = Z \ [\text{Max}] \end{cases}$$

1) Résoudre par la méthode des tableaux (N.B : il y a deux itérations)
Donner en clair les valeurs des variables et de Z à l'optimum.

2) Résoudre graphiquement
On tracera **avec soin** le graphique ; on prendra obligatoirement comme échelle : 1 cm pour 5 unités de x_1, et 1 cm pour 5 unités de x_2.
Expliquer comment intervient géométriquement la fonction économique dans cette résolution graphique.

EXERCICE III

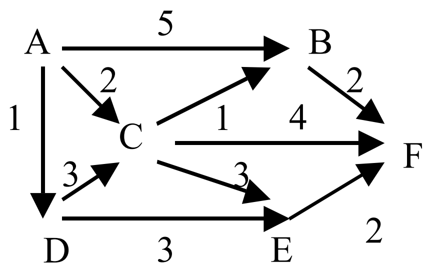


Figure 1

Nous considérons le graphe valué donné dans la figure 1 ci-dessus. L'objectif est de déterminer un plus court chemin (chemin de valeur minimale) ayant le sommet A pour origine et le sommet F pour extrémité.

Question 1 *Donner les raisons pour lesquelles l'algorithme de Dijkstra peut être appliqué.*

Question 2 *Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour déterminer un plus court chemin de A vers F. Vous donnerez le détail de chaque itération.*

EXAMEN DE GRAPHES ET ALGORITHMES A5

9 FEVRIER 2001

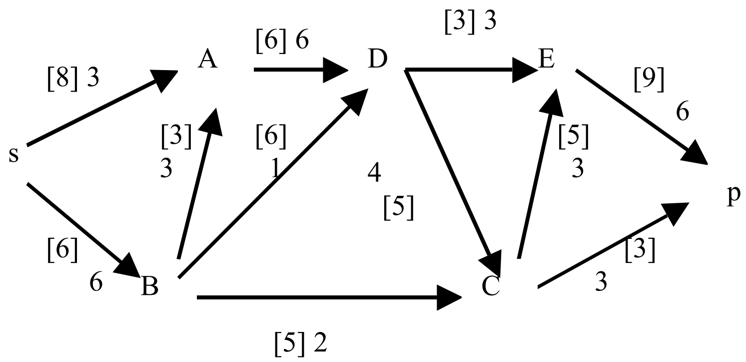


Figure 1

EXERCICE I

Soit le graphe G donné par la figure 1. Retracer ce graphe, à grande échelle, en supprimant les nombres attachés aux arcs : vous obtenez ainsi un graphe non valué.

Question 1 : *Par un parcours en profondeur du graphe à partir du sommet s, déterminer les descendants de s (rappel : ce sont les sommets x tels qu'il existe au moins un chemin de s vers x)*

NB. lors du parcours, le sommet à ouvrir (ou "prévisiter") immédiatement après s, sera obligatoirement A ; de même après D, ce sera E.

Vous indiquerez l'arborescence associé au parcours ainsi que tous les états successifs de la pile décrivant ce parcours.

Question 2 : G *est-il connexe ? justifier à l'aide du parcours.*

Question 3 : *G est-il fortement connexe ? Justifier directement.*

Question 4 : *G contient-il un chemin hamiltonien ? Si oui, le donner en détail; sinon, justifier votre réponse.*

EXERCICE II

Nous considérons le réseau de transport donné dans la figure 1, où l'on cherche à déterminer un flot maximal de la source s au puits p. La capacité de chaque arc est inscrite entre crochets, à côté figure le flux.

Question 1 *Vérifier que les flux donnés forment un flot. Déterminer la valeur de ce flot.*

Question 2 *le flot donné est-il optimal ? Si non, déterminer la valeur d'un flot maximal.*

(vous retracerez soigneusement le graphe pour chaque itération)

Question 3 *Donner la coupe minimale. Quelle est son interprétation physique concrète dans un réseau de transport ?*

EXERCICE III

Soit le programme linéaire ci-dessous :

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max z = & 2x_2 & + & x_2 & & \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \square & 4 \\
 & -4x_1 & + & 7x_2 & \square & 7 \\
 & x_1 & \geq & 0, & x_2 \geq & 0
\end{array}
$$

Question 1 *Résoudre ce programme linéaire par l'algorithme du simplexe (méthode des tableaux).*

Question 2 *Faire une vérification graphique où figurent des droites z = constante.*

(vous tracerez soigneusement la figure à l'échelle suivante : 1 unité = 2 cm).

Expliquez comment intervient la fraction économique dans cette résolution graphique.

Question 3 *Illustrer sur ce graphique le parcours associé à l'algorithme du simplexe.*

CHAIRE DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

****

Examen de GRAPHES ET ALGORITHMES A

Informatique A5 (19535)

Vendredi 8 Février 2002

CNAM

18H30 à 21H00

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS
CHAIRE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
B. LEMAIRE
Titulaire de la chaire

L'examen comporte trois exercices indépendants. Tous les documents sont autorisés.

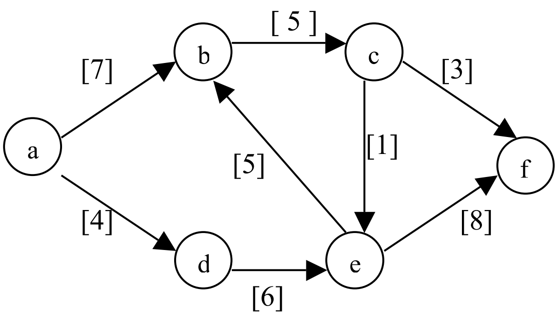
Prière de soigner la clarté de la rédaction et de la présentation. Indiquez votre nom **LISIBLEMENT** en lettres majuscules (pour les femmes mariées donner les deux noms), et votre numéro d'élève.

RESULTATS : **Aucune information ne sera communiquée par téléphone ni par e-mail.**

Les résultats seront affichés à l'accès 11 et devant les Algécos dans la cour d'honneur.

I

Soit le graphe G ci-dessous (entre crochets on a indiqué la capacité de chaque arc) :



I.0) Ce graphe est-il connexe ? fortement connexe ?

I.1) Vérifier que G est un réseau de transport.

I.2) On donne le flot initial suivant : _(a,d) = _(d,e) = 4 ; _(e,f) = 4 ; _ (a, b) = 3 ; _(e, b) = 1 ; _(b, c) = 4 ; _(c,f) = 3 ; _(c,e) =1

Représenter les arcs saturés par un trait double.

Quelle est la valeur de ce flot ? S'agit-il d'un flot complet .

Est-il optimal ? Sinon, en appliquant l'algorithme vu en cours, l'optimiser.

I.3) Donner la coupe minimale ; rappeler sa signification physique concrète.

II

Effectuer un parcours en profondeur sur le graphe ci-dessus, **après l'avoir retracé à grande échelle** (sans recopier les capacités), à partir du sommet a. Donner l'état de pile associé à chacune des étapes de ce parcours.

Indiquer le numéro d'ordre de prévisite (ou ouverture) et le numéro d'ordre de postvisite (ou fermeture) de chaque sommet.

III

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \; , \; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$3x_1 + x_2 = Z \text{ [MAX]}$$

III-1) Résoudre par l'algorithme du simplexe (méthode algébrique ou méthode des tableaux : au choix)

III-2) Vérifier graphiquement, en utilisant une famille de droites représentant la fonction économique pour différentes valeurs de Z . Echelle : 1 cm pour 1 unité de x_1 ou de x_2.

CHAIRE DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

****

Examen de GRAPHES ET ALGORITHMES A

Informatique A5 (19535)

Vendredi 7 Février 2003

AMPHI T

18H30 à 21H00

B. LEMAIRE
Titulaire de la chaire

L'examen comporte trois exercices indépendants. Tous les documents sont autorisés.

Prière de soigner la clarté de la rédaction et de la présentation. Indiquez votre nom **LISIBLEMENT** en lettres majuscules (pour les femmes mariées donner les deux noms), et votre numéro d'élève.

RESULTATS : **Aucune information ne sera communiquée par téléphone ni par e-mail.**

Les résultats seront affichés à l'accès 11 et devant les Algécos dans la cour d'honneur.

I (7 points)

Soit le programme linéaire

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$Max\ 2x_1 + x_2 = Z$$

1) Résoudre par l'algorithme du simplexe (méthode algébrique ou méthode des tableaux)
2) Vérifier graphiquement en utilisant une famille de droites représentant la fonction économique pour différentes valeurs de Z

   Échelle : 1 cm pour une unité de x1 ou x2.

II (7 points)

Soit le graphe G = (X, U) de n = 6 sommets (indicés de I= 1 à I = 6) et de m = 10 arcs (indicés de J = 1 à J = 10) défini par les deux tableaux ci-dessous.

Dans le premier tableau, NARC (I) désigne le demi-degré extérieur du sommet d'indice I (c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant le sommet I comme extrémité initiale).

I	1	2	3	4	5	6
NARC(I)	3	2	2	2	0	1

Dans le second tableau, on a listé dans l'ordre lexicographique tous les successeurs du sommet 1, puis ceux du sommet 2, etc (s'ils existent). Ainsi EXTR(J) désigne l'indice du sommet qui est l'extrémité terminale de l'arc numéroté J.

Rappel : on a numéroté les arcs en commençant par ceux issus du sommet 1, puis ceux issus du sommet 2, etc.

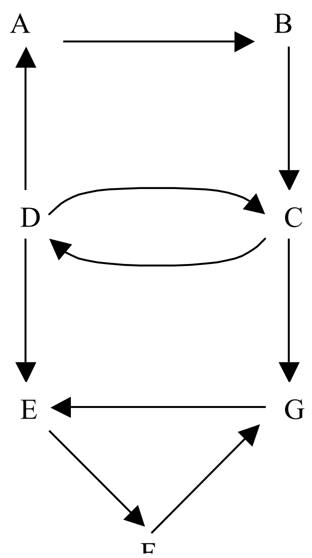
En outre, l'arc J a le coût COUT (J)

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EXTR(J)	2	3	4	4	6	2	4	5	6	5
COÛT (J)	6	1	9	2	4	3	8	6	1	2

1) Tracer ce graphe
2) Déterminer, par application de l'algorithme de DIJKSTRA, le chemin de valeur minimale de x_1 à x_5 (que vous illustrerez sur le graphe) Pourquoi peut-on appliquer cet algorithme à cet exemple ?
3) Le graphe tracé est-il connexe ? Justifier votre réponse.
4) Le graphe tracé est-il fortement connexe ? Justifier votre réponse.

III (7 points)

Soit le graphe G= (X, U) ci-dessous. On se propose de déterminer à l'aide de l'algorithme de KOSARAJU et SHARIS quelles sont ses composantes fortement connexes.



1) Effectuer un parcours en profondeur de ce graphe à partir du sommet A ; noter pour chaque sommet son numéro d'ordre de fermeture (ou « postvisite »). Tracer l'arborescence associée et donner tous les états de la pile associée à ce parcours.
   NB : Quand vous aurez le choix entre plusieurs sommets à ouvrir (« prévisiter »), prendre le premier dans l'ordre alphabétique.

2) Tracer le graphe (à échelle suffisante) en inversant l'orientation de chaque arc ; renuméroter les sommets à l'aide du 1). Appliquer l'algorithme de Kosaraju et Sharis et déterminer les composantes fortement annexes de G.

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

CHAIRE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

CHAIRE DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

****

Examen de GRAPHES ET ALGORITHMES A0

Informatique A5 (25917)

Vendredi 20 juin 2003

35 3 28

18H30 à 21H00

B. LEMAIRE
Titulaire de la chaire

L'examen comporte trois exercices indépendants. Tous les documents sont autorisés.

Prière de soigner la clarté de la rédaction et de la présentation. Indiquez votre nom **LISIBLEMENT** en lettres majuscules (pour les femmes mariées donner les deux noms), et votre numéro d'élève.

RESULTATS : **Aucune information ne sera communiquée par téléphone ni par e-mail.**

Les résultats seront affichés à l'accès 11.

I

Soit le programme linéaire :

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & & \leq & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & z \quad [\text{MAX}] \end{array}$$

1) Résoudre géométriquement (échelle : 1 cm pour 1 unité de x_1 ou de x_2).
Expliquer comment on utilise la fonction économique dans cette résolution.
Donner, en clair, les valeurs de x_1, x_2 et de z à l'optimum.

2) Résoudre par l'algorithme du simplexe, de préférence par la méthode des tableaux..

II

Soit le graphe défini par les tableaux ci-dessous, comportant n = 4 sommets et m = 5 arcs ; chaque arc est valué par sa capacité et son flux initial :

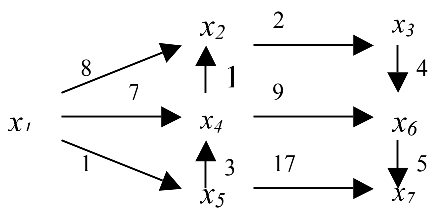
i	1	2	3	4
d_i^+	1	2	0	2

j	1	2	3	4	5
$ext\,t\,(j)$	3	1	3	1	2
$capa\,(j)$	20	30	10	30	10
$flux\,(j)$	20	5	5	25	10

1) Tracer le graphe ; valuer chaque arc par sa capacité (noté entre crochets) et son flux .
2) Montrer que ce graphe est un réseau de transport ;
3) Le flot initial est-il complet ? Optimal ? Si non l'optimiser par l'algorithme du cours.
4) Donner une coupe minimale.

N.B :les sommets ont été numérotés de 1 à n ; d_i^+ désigne le nombre d'arcs issus de x_i. Les arcs ont été numérotés de 1 à m, lexicographiquement : d'abord ceux issus de x_1, puis ceux issus de x_2, etc. $ext\,t\,(j)$ désigne l'extrémité terminale de l'arc numéroté j.

III



Soit le graphe valué ci-dessus. Le but est de déterminer un chemin de valeur minimale de x_1 à x_7

1)Donner la raison pour laquelle l'algorithme de Dijkstra peut être appliqué ici.

2) Appliquer cet algorithme pour trouver un plus court chemin de x_1 à x_7.
Vous donnerez le détail de chaque itération.

Chaire de Recherche Opérationnelle
****

Examen de GRAPHES ET ALGORITHMES A

Informatique A5 (19535)

Mardi 15 juin 2004
CNAM 39 3 45
18H30 à 21H00

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS
CHAIRE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

B. LEMAIRE
Titulaire de la chaire

L'examen comporte trois exercices indépendants. Tous les documents sont autorisés.

Prière de soigner la clarté de la rédaction et de la présentation. Indiquez votre nom **LISIBLEMENT** en lettres majuscules (pour les femmes mariées donner les deux noms), et votre numéro d'élève.

RESULTATS : **Aucune information ne sera communiquée par téléphone ni par e-mail.**

Les résultats seront affichés à l'accès 11.

I

Soit le graphe défini par les deux tableaux suivants :

- Le premier tableau donne pour chaque sommet x_i son demi-degré extérieur (qui est le nombre d'arcs ayant x_i comme extrémité initiale), noté dde(i) ; i = 1, 2,....,n.

- Le second tableau est associé aux arcs, qui sont indicés par j (j =1, 2 ,..,m). On a d'abord considéré (en respectant l'ordre lexicographique) les arcs ayant x_1 comme extrémité initiale, puis ceux issus de x_2, et ainsi de suite jusqu'à ceux issus du sommet x_n.

pour chaque arc u_j, ce second tableau donne :

- le sommet extrémité terminale de l'arc u_j, noté ett (j)
- la capacité de l'arc u_j, notée cap(j)
- le flux initial sur l'arc u_j, noté flux (j)

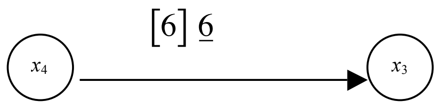
i	1	2	3	4	5
dde(i)	2	2	1	2	0

j	1	2	3	4	5	6	7
ett(j)	2	3	3	4	5	3	5
capa(j)	16	14	6	6	6	6	12
flux(j)	6	0	0	6	6	6	0

1) Tracer le graphe à grande échelle

x_i

- noter x_i (le sommet d'indice i) dans un cercle :
- sur chaque arc u_j, noter la capacité de cet arc entre crochets : [ ]
- puis sur chaque arc u_j, noter le flux de cet arc par un entier souligné.

ex: 

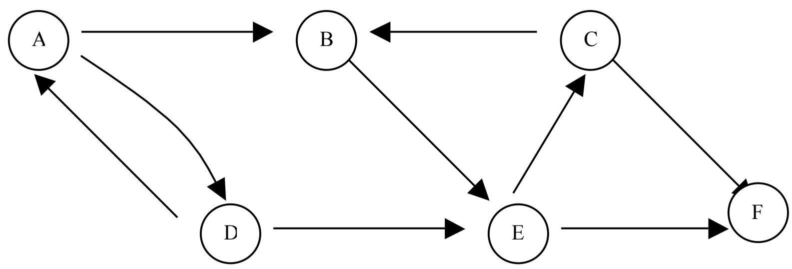
2) Montrer en détail que ce graphe est un réseau de transport

3) En utilisant l'algorithme que vous avez appris en cours, déterminer si le flot initial (donné dans le second tableau) est de valeur maximale. Sinon optimiser le flot.

4) Donner une coupe minimale et rappeler son interprétation concrète.

II

Soit le graphe G ci-dessous :



1) Effectuer un parcours en profondeur de ce graphe. Utilisez A comme sommet initial ; quand vous aurez le choix entre plusieurs sommets à ouvrir, respecter l'ordre alphabétique. Donner pour chaque sommet son numéro d'ordre de fermeture.

2) Déterminer en appliquant l'algorithme du cours, les composantes fortement connexes de G.

N.B. Pour la question 1 et pour la question 2, vous donnerez l'état de la pile associée à chaque itération.

III

Soit le programme linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ x_1 \; , \; x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 = Z \; [\text{MAX}] \end{cases}$$

1) Déterminer, par l'algorithme du simplexe, l'optimum.

2) Vérifier graphiquement.