NFP136- Cours 7
ARBRES DE RECHERCHE

PLAN

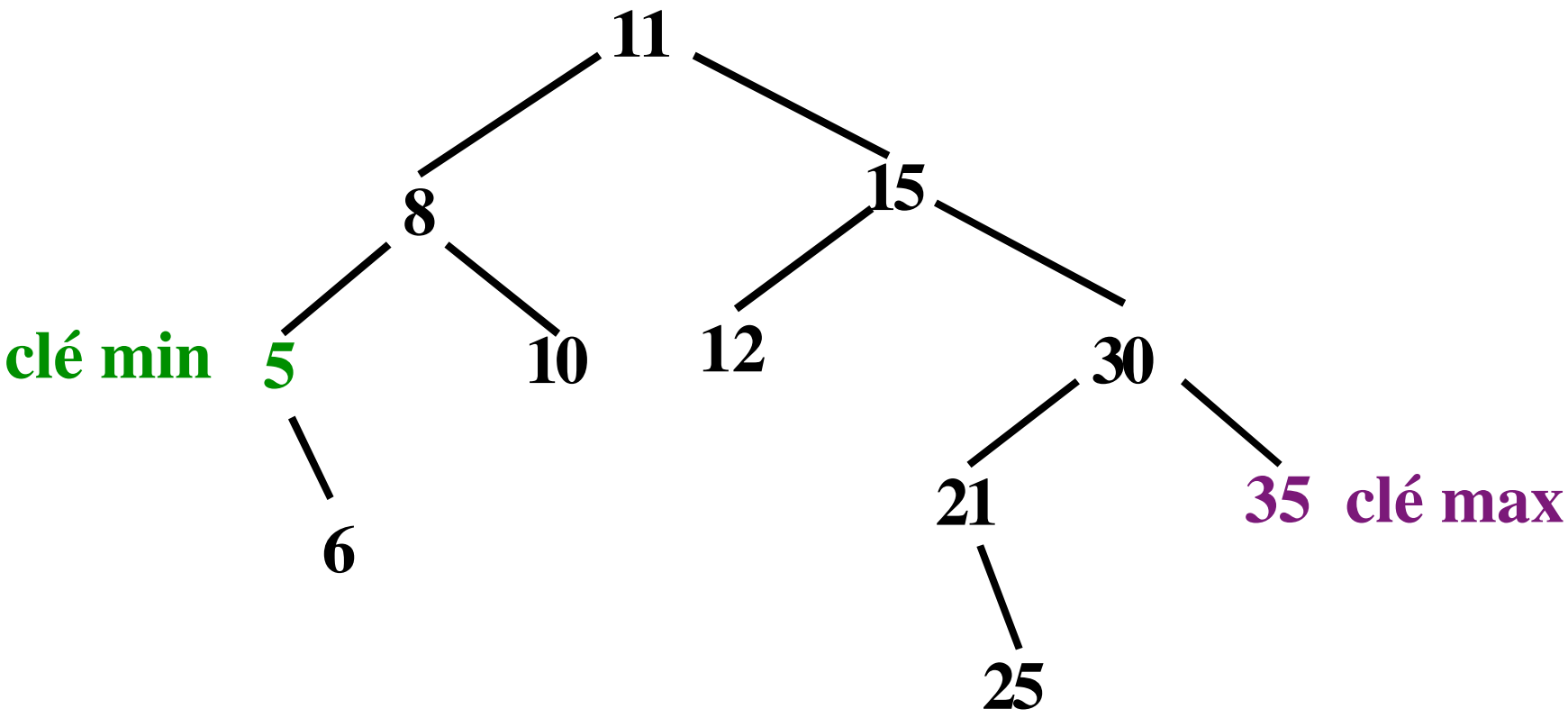
- **Arbres binaires de recherche**
- **Arbre h-équilibrés**

7.1 ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE

Définition

Arbre binaire tel qu'en tout nœud la clé du nœud est supérieure à celle de tous ses descendants de gauche et inférieure à celle de tous ses descendants de droite

EXEMPLE



RAPPEL: Voir cours n° 3 sur les arbres

ABR: **structures de données pour grands volumes variables d'informations structures dynamiques**

Arbre binaire a

a.g = sous-arbre de gauche de racine(a)

a.d = sous-arbre de droite de racine(a)

Clés **une donnée → une clé**

{clés} ensemble totalement ordonné

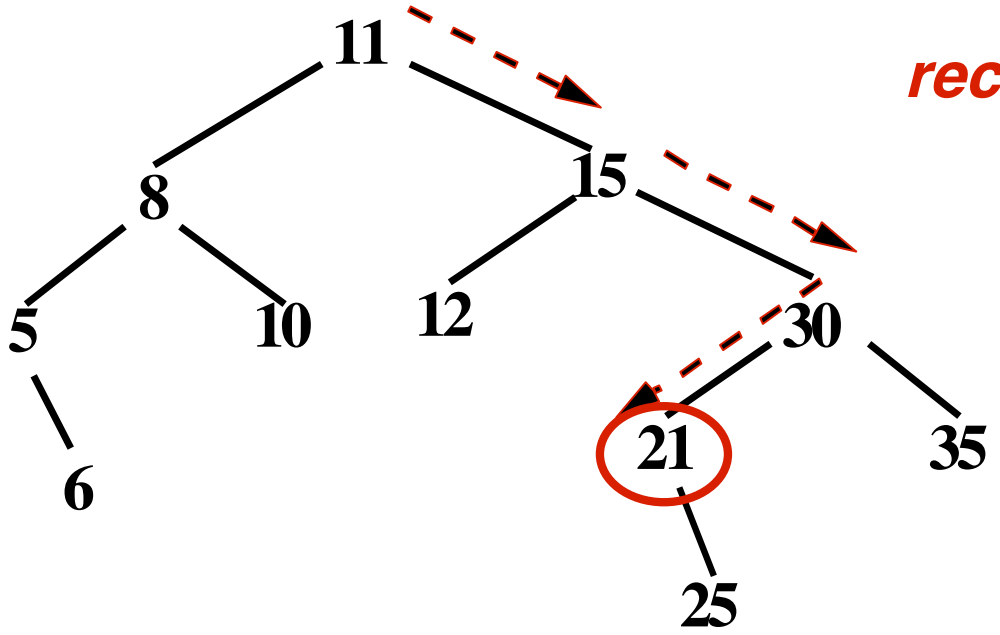
```
class ABR {
   private int cle;
   private String element;
   private ABR gauche;
   private ABR droit;

public ABR(int a, String s, ABR g, ABR d) {
    cle = a;
    element = s;
    gauche= g;
    droit=d;
}
//les méthodes
```

Recherche :

descente de l'arborescence avec comparaison en chaque nœud

EXEMPLE



recherche de 21

principe de la recherche de l'élément e de clé c dans l'arbre a

précondition: $c \in a$

recherche(c,a) renvoie String

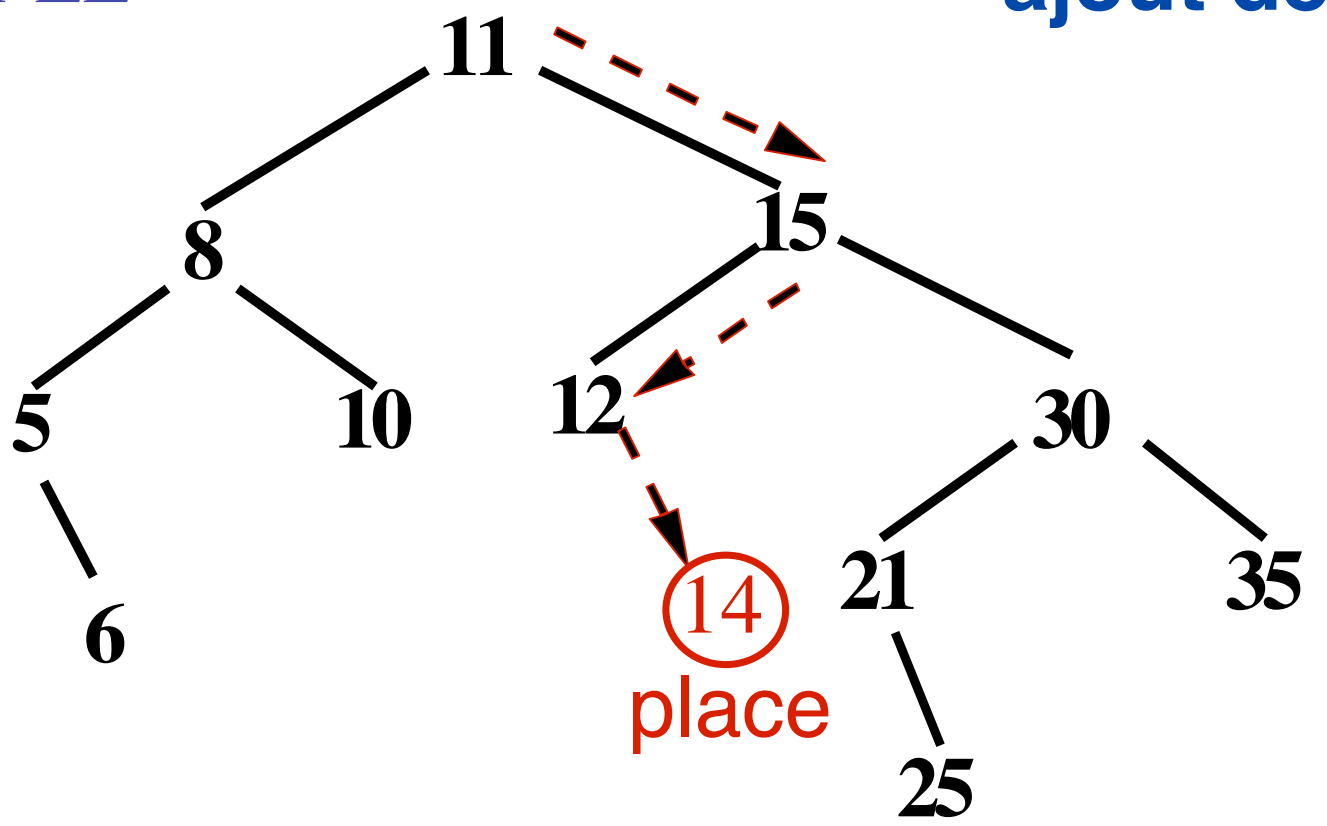
```
 si c == a.cle
   alors retourner (a.element )
                          //élément de la racine de a
   sinon
      si c< a.cle
        alors retourner (recherche(c, a.gauche))
        sinon retourner (recherche(c, a.droit))
      finsi
finsi
```

complexité: O(h(a))

ADJONCTION D'UN ELEMENT

EXEMPLE

ajout de 14



complexité: O(h(a))

adjonction dans a d'un élément e de clé c

```
ABR  ajouter (ABR a, String e, int c)
b=a;
si b == null  alors  b=new ABR (c, e, null, null ) ;
sinon tant que  non place_trouvée faire
            si b.cle == c alors "erreur"  //élément déjà présent
            si b.cle > c
              alors //descendre à gauche
                si b.gauche == null  alors place_trouvée=vrai //fils gauche de b
                                          b.gauche=new ABR (c, e, null, null ) ;
                                        sinon b = b.gauche;
                finsi;
              sinon //descendre à droite
                 si b.droit == null  alors place trouvée=vrai //fils droit
                                             b.droit=new ABR (c, e, null, null ) ;
                                        sinon b =b.droit;
                finsi;
              finsi;
     fait;
finsi;
retourner b;
```

suppression d'un nœud N

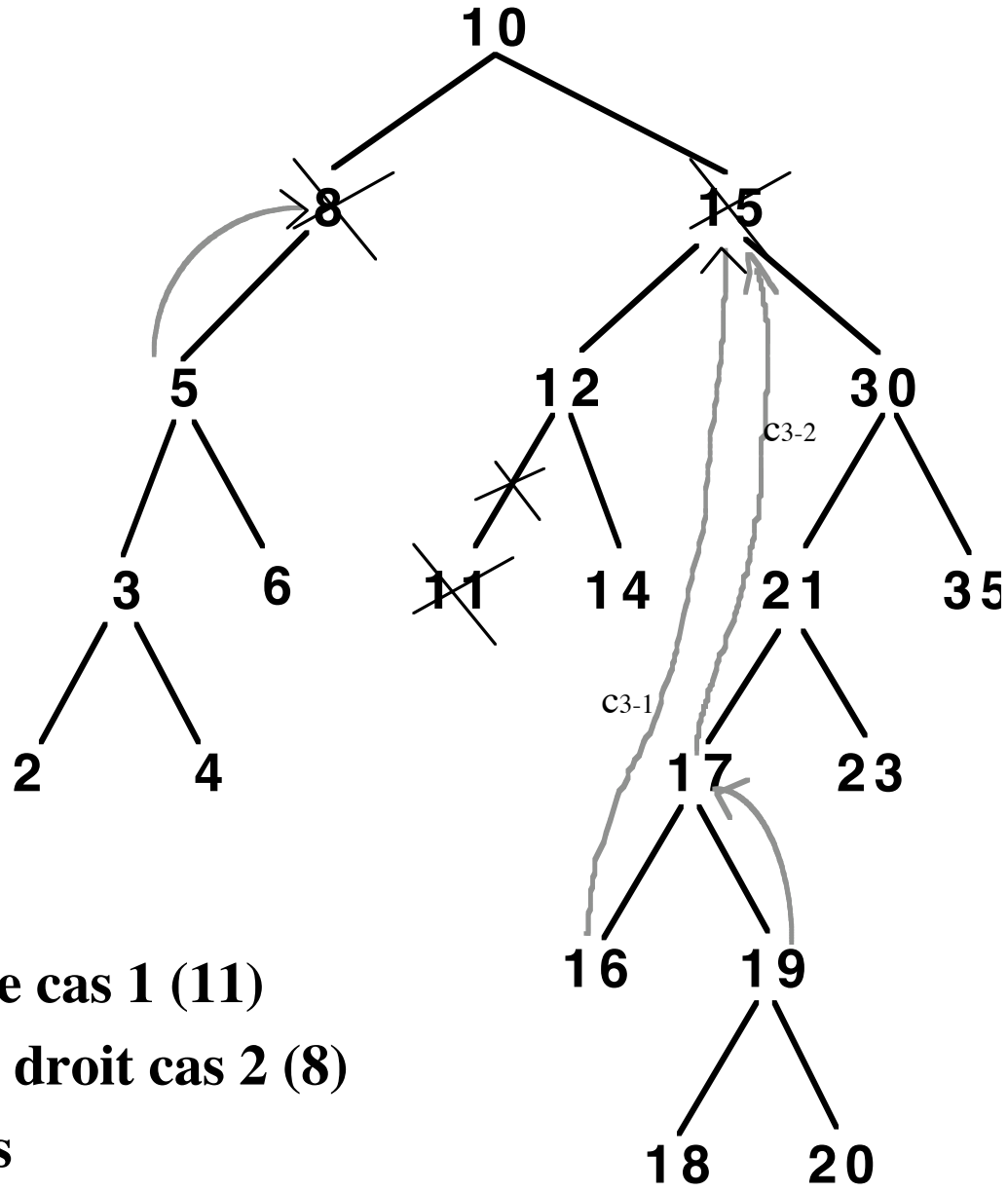
cas 1: **N est une feuille**

cas 2: **N a un seul fils F**

cas 3: **N a 2 fils**

(2 cas *cas 3-1 cas 3-2*)

EXEMPLE



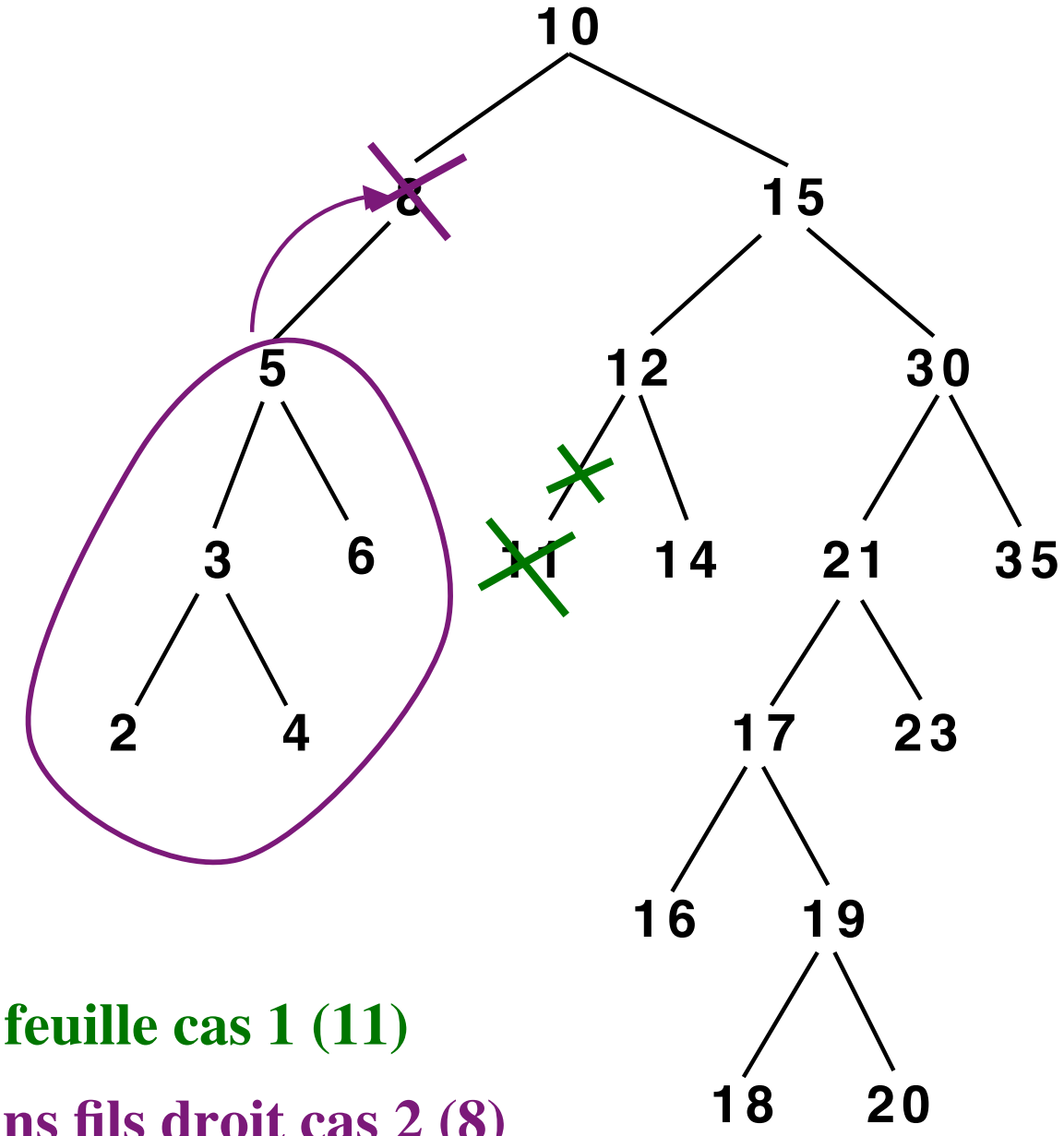
suppression d'une feuille cas 1 (11)

sup. d'un nœud sans fils droit cas 2 (8)

sup. de nœuds avec 2 fils

cas 3-1 (15) puis cas 3-2 (16)

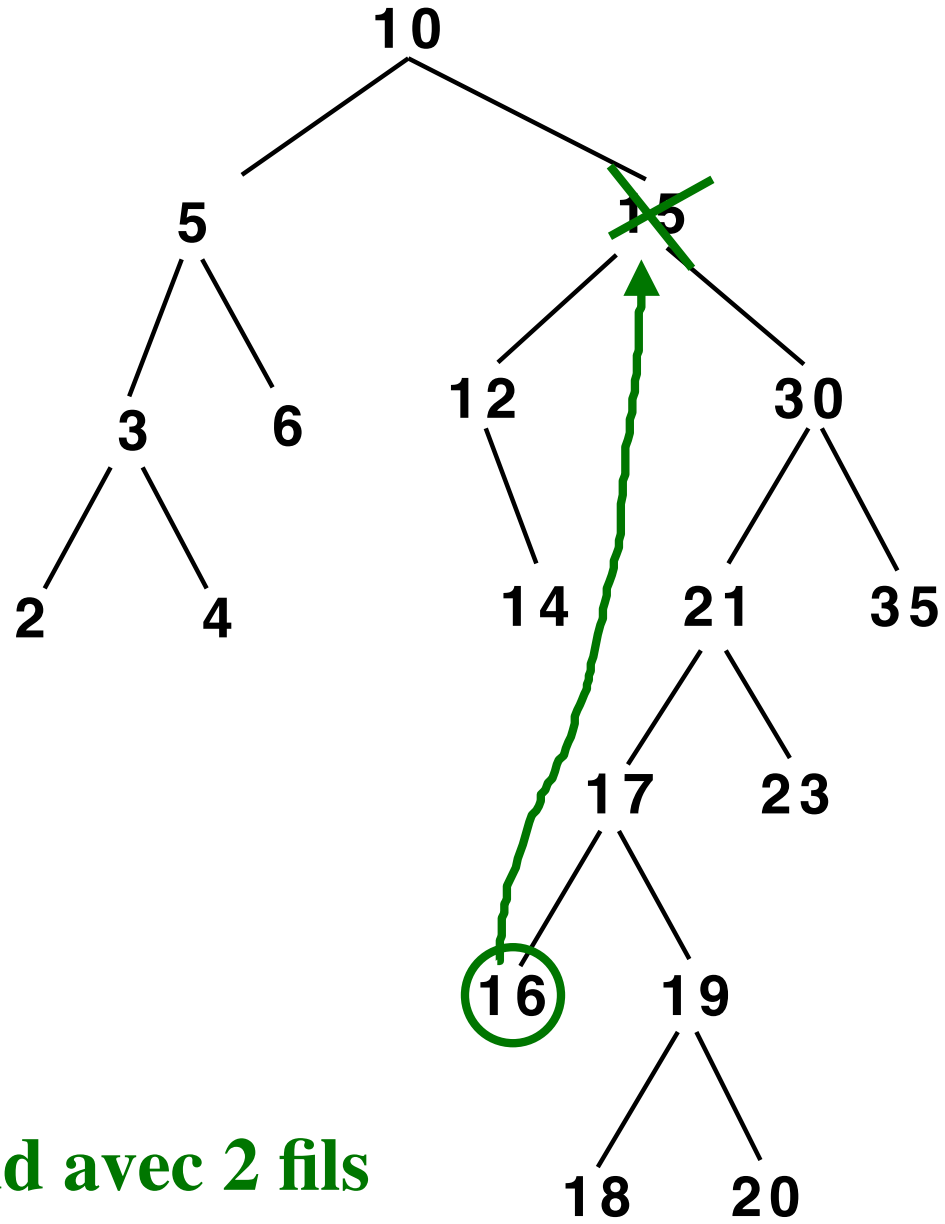
EXEMPLE



suppression d'une feuille cas 1 (11)

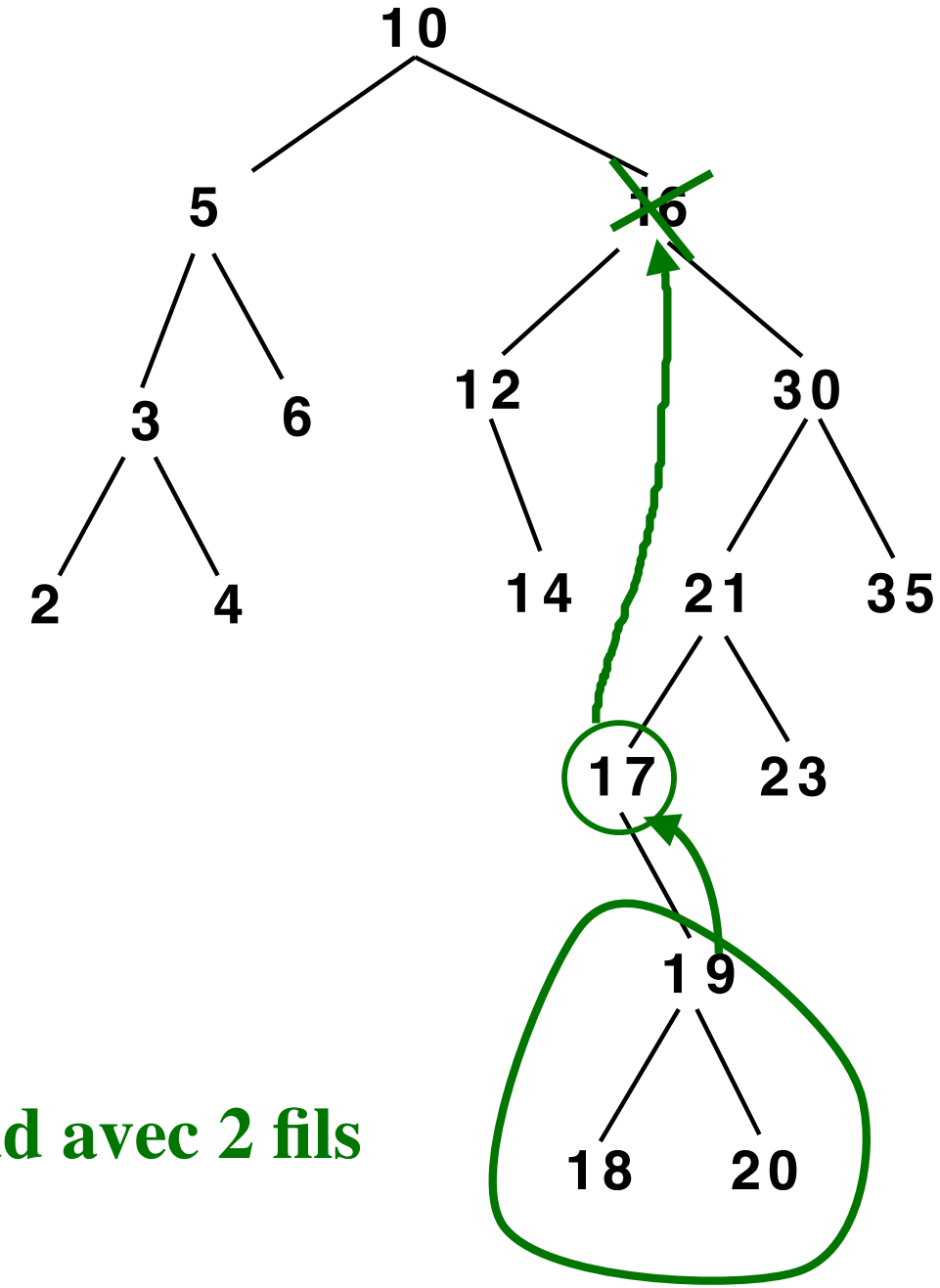
sup. d'un nœud sans fils droit cas 2 (8)

EXEMPLE



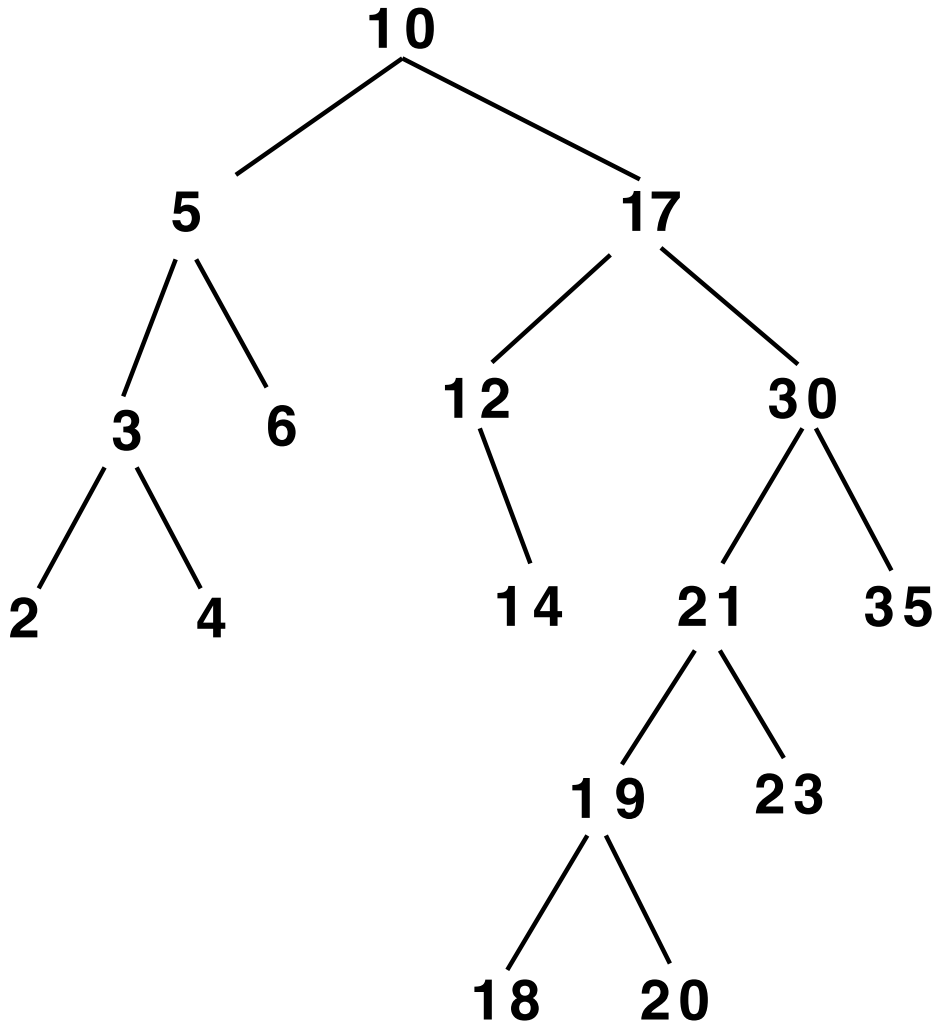
suppression d'un nœud avec 2 fils
cas 3-1 (15)

EXEMPLE

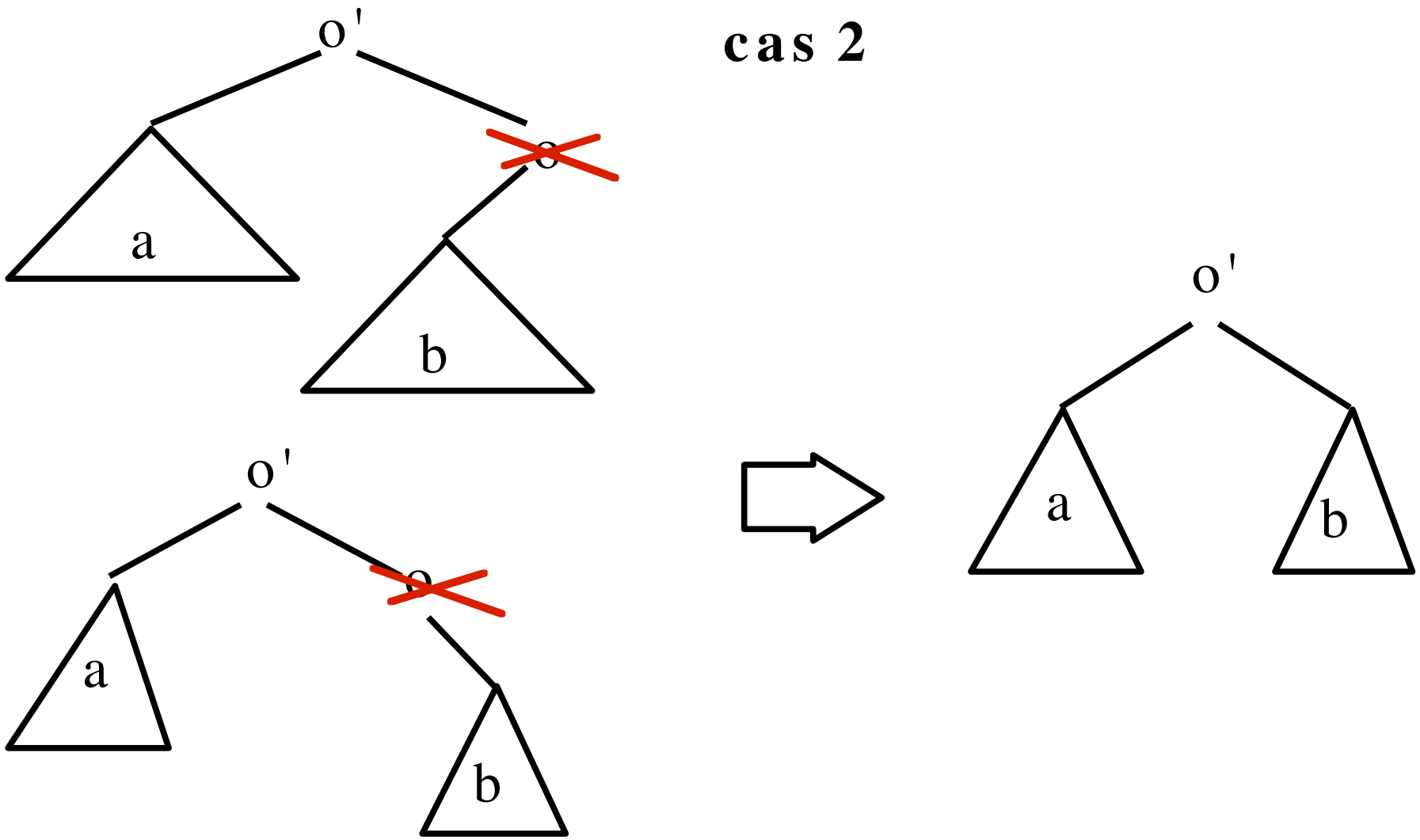


suppression d'un nœud avec 2 fils
cas 3-2 (16)

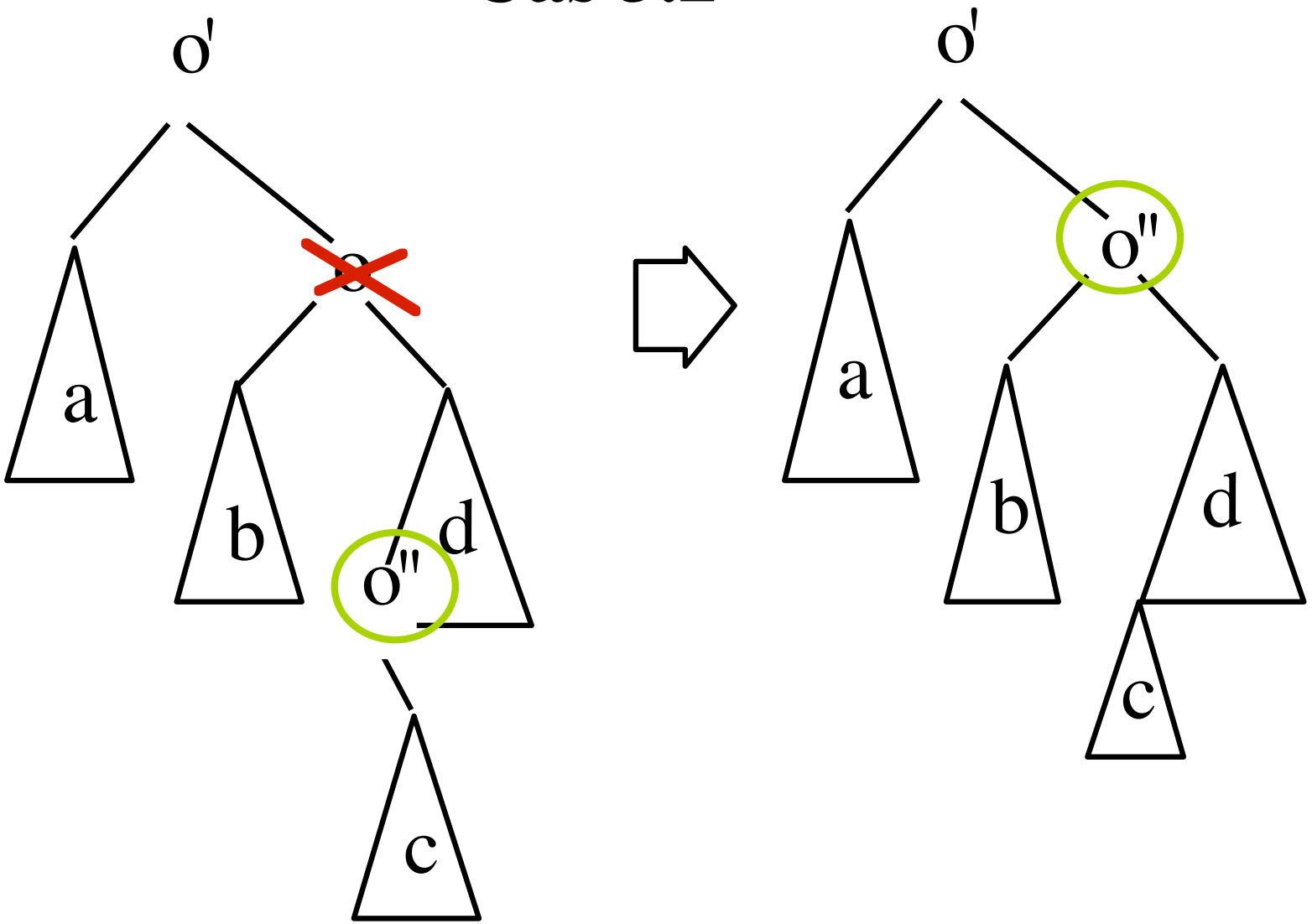
EXEMPLE



cas 2



Cas 3.2



suppression d'un nœud N

cas 1: **N est une feuille**

→ **suppression simple**

cas 2: **N a un seul fils F**

→ **F prend la place de N**

(remontée du sous-arbre)

cas 3: **N a 2 fils**

→ **est remplacé par le nœud de plus petite clé de son sous-arbre de droite**

cas 3-1: **c'est une feuille**

cas 3-2: **ce noeud n'a qu'un fils droit qui prend sa place**

cas 3 **a a 2 fils:**

rechercher le plus petit du sous-arbre de droite

f = a.d;

tant que **f.g≠Ø** faire **f=f.g** fait**;**

a.element = f.element;

a.cle=f.cle; *l'élément de f remplace l'élément supprimé*

f = f.d; *si f n'a pas de fils gauche remonter le fils droit de f;*

f.d =Ø si f feuille

Complexité de la suppression: O(h(a))

Conclusion arbre binaire de recherche

- **recherche,**

  adjonction,

  suppression

  complexité: O(h(a))

  avec $\log_2 n \leq h(a) \leq n-1$

  complexité en moyenne: O(log n)

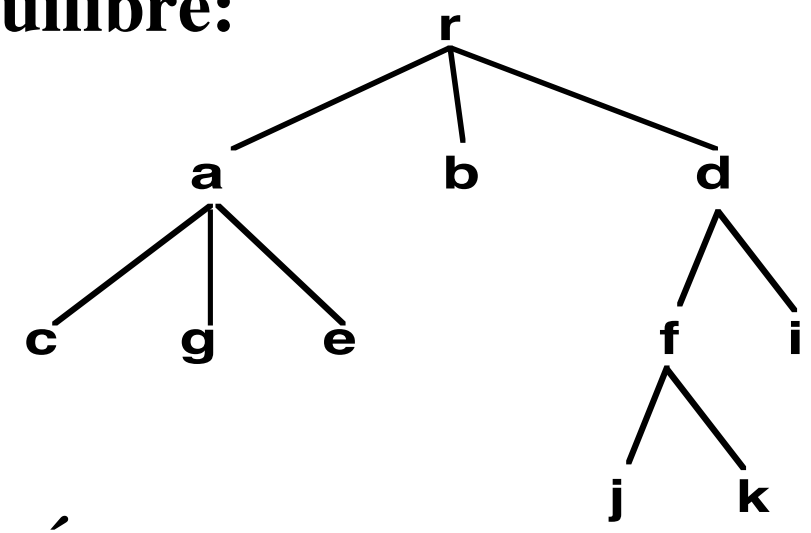
- **problème:**

  éviter les cas défavorables

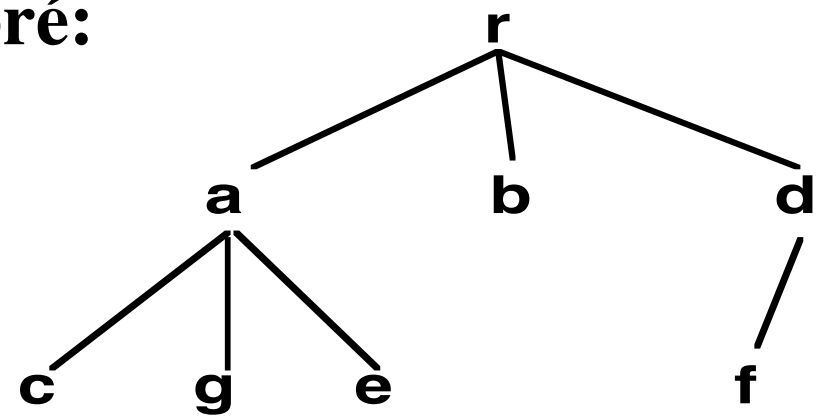
  → arbres équilibrés

équilibre

arbre non équilibré:



arbre équilibré:



les feuilles sont sur au plus 2 niveaux

7.2 ARBRES H-EQUILIBRES

définition: Arbre tel qu'en tout nœud la différence de hauteur entre les sous-arbres gauche et droit est au plus de 1

déséquilibre:

$$déseq(a) = h(a.g) - h(a.d)$$

$$déseq(a) = 0 \text{ si } a = \emptyset$$

arbre H-équilibré

pour tout b sous-arbre de a,

$$déséq(b) \in \{-1, 0, +1\}$$

arbre H-équilibré $\Rightarrow$ $\log_2(n+1) \leq h + 1 \leq 1.45\log_2(n+1)$

arbre AVL:

arbre binaire de recherche

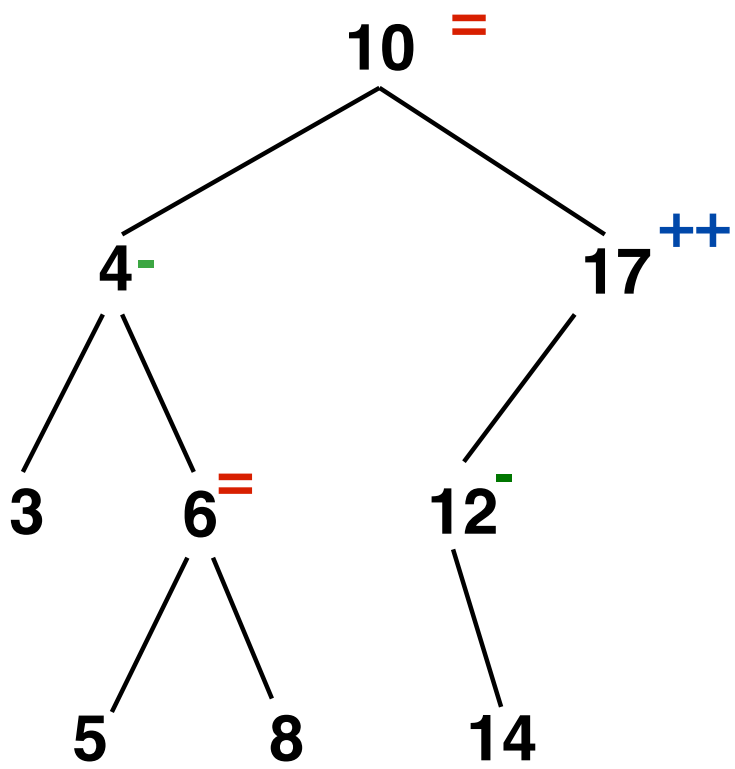
H-équilibré

⇒ ***la recherche dans un arbre AVL est au pire en $O(\log_2 n)$***

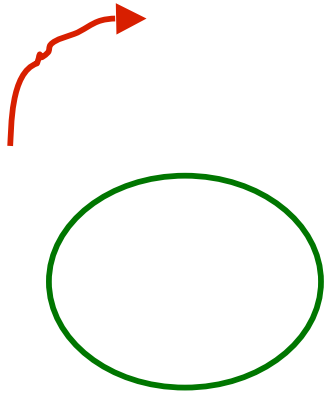
problème: maintenir l'équilibre

notations des déséquilibres:

=	si h(a.g) = h(a.d)
-	si h(a.g) = h(a.d)-1
--	si h(a.g) = h(a.d)-2
+	si h(a.g) = h(a.d)+1
++	si h(a.g) = h(a.d)+2



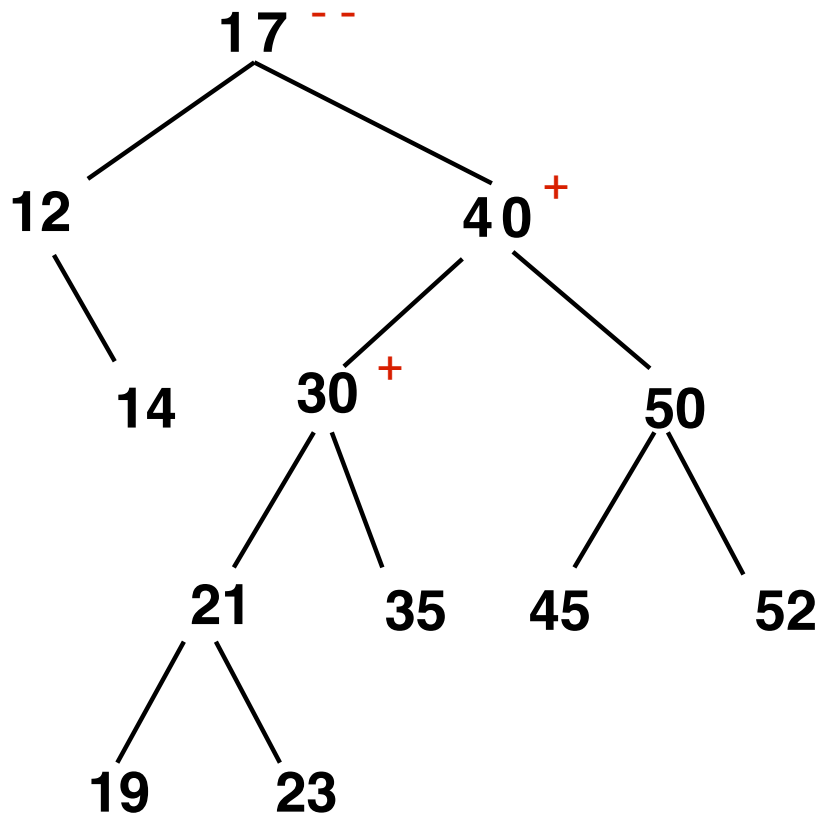
exemple de rotation



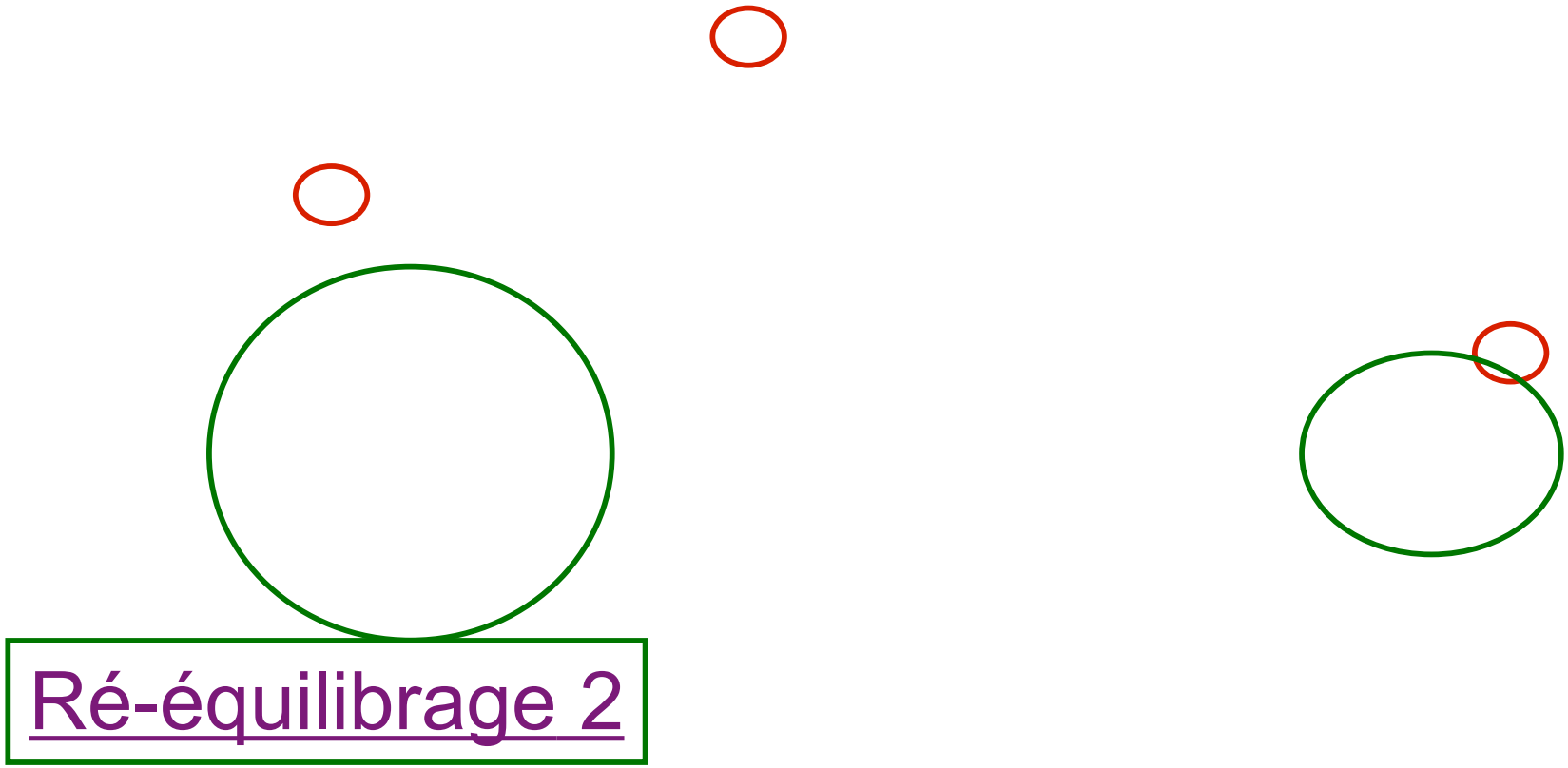
Ré-équilibrage 1

rééquilibrage: rotation à droite

déséquilibre(A)=2, et déséquilibre(A.g))=1 ou 0 ⇒ rotation à droite



La rotation simple apporte un nouveau déséquilibre: double rotation nécessaire


Ré-équilibrage 2

rotation gauche-droite

déséq(A)=2, déséq(g(A))= -1 $\Rightarrow$ rotation gauche-droite

adjonction et suppression

même principe que dans un arbre binaire de recherche mais en rééquilibrant par rotations après l'opération si c'est nécessaire (si a n'est plus H équilibré)

Dans les arbres AVL

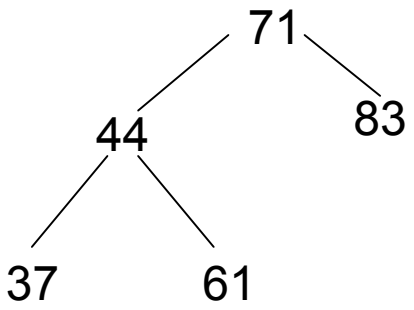
recherche **adjonction** **suppression**	**en $O(\log_2 n)$**

On constate expérimentalement:

en moyenne 1 rotation pour 2 adjonctions

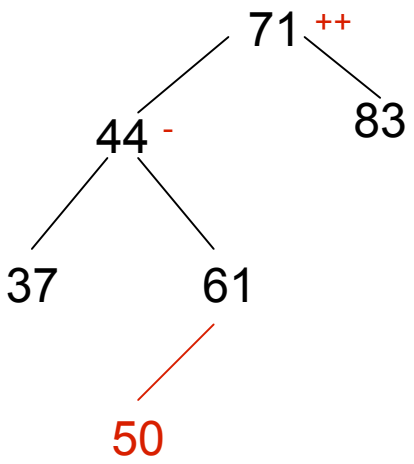
en moyenne 1 rotation pour 5 suppressions

Exemple



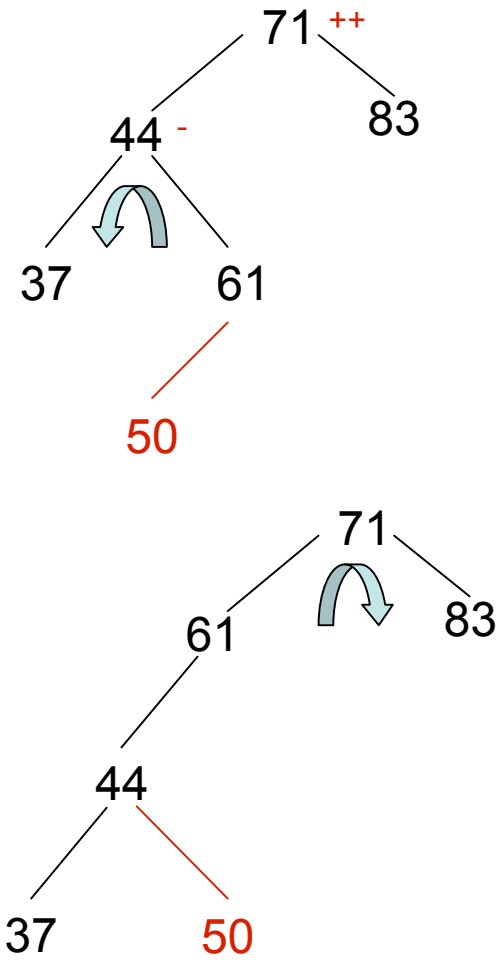
C’est bien un AVL

Exemple



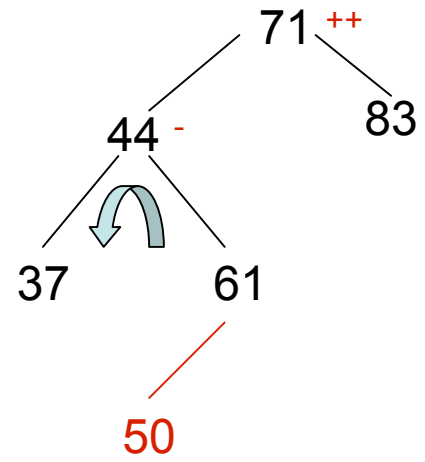
Insertion de 50. ABR mais non AVL

Exemple

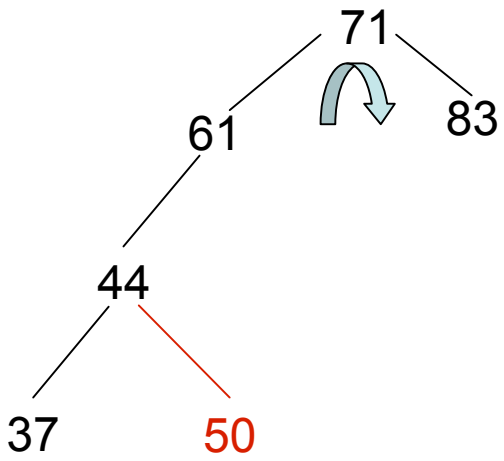


Double rotation gauche puis droite

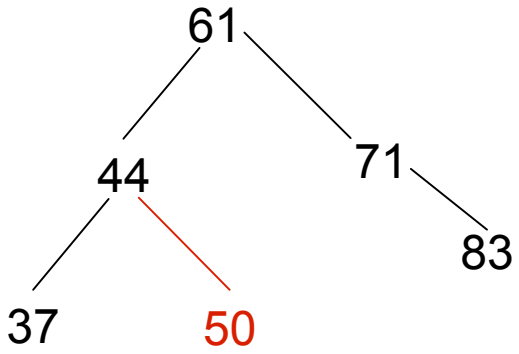
Exemple



Double rotation gauche puis droite



puis



AVL