

1) Objectif du projet

Le but de ce projet est l'étude de la reconstruction d'une image composée de trois couleurs à partir de la connaissance des projections horizontales et verticales de cette image. On modélisera la recherche de l'image originale à l'aide d'un programme en variables entières ou binaires, et il conviendra ensuite de résoudre le problème par une méthode heuristique d'une part et par la programmation linéaire en nombres entiers d'autre part.

2) Description du projet

On considère dans ce projet deux problèmes intervenant notamment en imagerie médicale. Ces deux problèmes consistent à reconstruire une image à trois couleurs à partir de certaines de ses caractéristiques connues. Plus précisément, une image est considérée comme une grille de pixels. Chaque pixel correspond à une case de la grille et on considère qu'il ne peut prendre que trois couleurs : rouge (R), bleu (B) ou vert (V). Le terme générique de rangée désignera indifféremment une ligne ou une colonne de l'image.

Le premier problème qui nous intéresse, que nous appellerons "**Problème de Reconstruction Simple**" (PRS) est le suivant : connaissant pour chaque rangée (ligne ou colonne), le nombre de cases rouges, vertes et bleues de la rangée (ce nombre est appelé projection de la rangée), proposer une image qui respecte ces projections. La figure 1 présente une instance résolue du problème PRS.

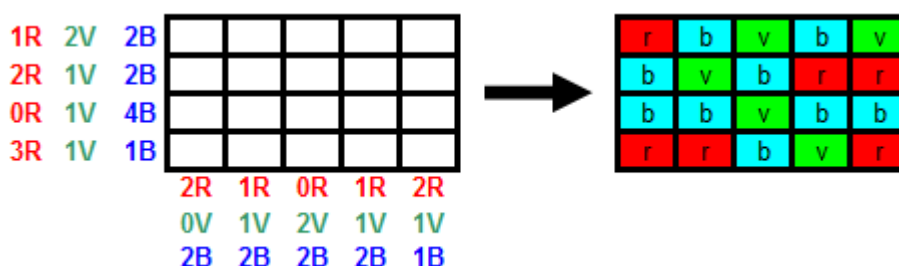
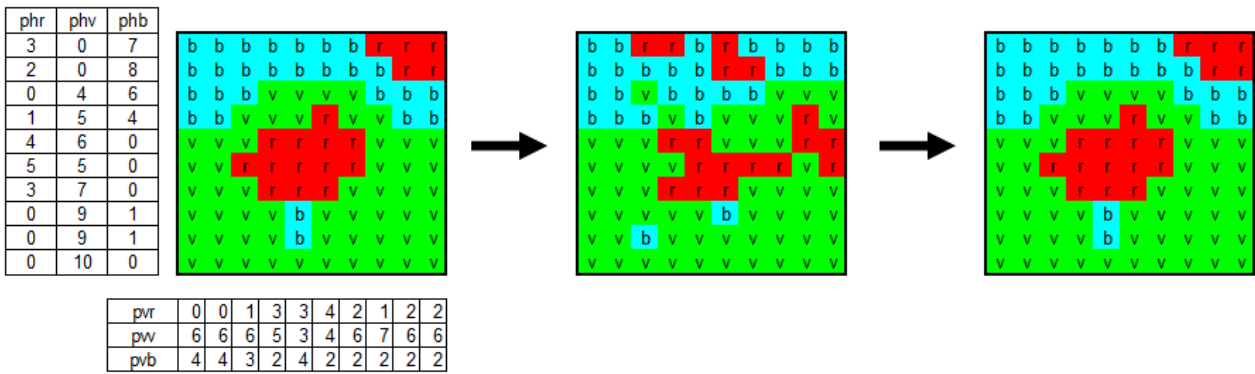


Fig. 1 – Reconstitution d'une image de 20 pixels (un pixel = une case) à 3 couleurs à partir de ses projections horizontales et verticales (problème PRS)

On voit bien qu'il ne s'agit pas à proprement parler d'un problème d'optimisation dans la mesure où il n'y a pas d'objectif à optimiser. On cherche plutôt à trouver une solution qui respecte un certain nombre de contraintes.

Le second problème auquel nous nous intéressons, que nous appellerons "**Problème de Reconstruction Compacte**" (PRC) est le suivant. On cherche maintenant à reconstituer l'image en faisant apparaître des zones de pixels de même couleur. Plus précisément, on cherche désormais, toujours en connaissant les projections verticales et horizontales, à reconstituer une image qui minimise le nombre d'alternances de couleur. On appellera alternance horizontale le fait qu'une case donnée soit de couleur différente de la case immédiatement à sa droite. On appellera alternance verticale le fait qu'une case soit de couleur différente de la case située juste en dessous. On appellera enfin alternance une alternance indifféremment horizontale ou verticale. Ainsi, dans l'image reconstituée de la figure 1, on peut compter 12 alternances horizontales (dont 4 sur la première ligne et 3 sur la deuxième), 14 alternances verticales, et l'image comporte donc 12+14=26 alternances au total.

L'exemple suivant présente une image de 100 pixels (10 lignes, 10 colonnes), ses projections horizontales et verticales, une solution du problème (PRS) et la solution du problème (PRC) fournie par Glpk. On remarque que le problème (PRC) reconstruit, pour cette instance, l'image originale.



L'image originale et ses projections

Une solution de (PRS)

La solution de (PRC)

3) Travail demandé

1. Une première question que l'on peut se poser et à laquelle vous devrez répondre est la suivante : peut-il exister plusieurs images différentes respectant toutes les projections horizontales et verticales ? Une autre, proche et à laquelle vous devrez répondre également est la suivante : peut-il exister deux images ayant les mêmes projections horizontales et verticales mais un nombre d'alternances différent ?
2. Proposez une modélisation des problèmes (PRS) et (PRC) sous la forme d'un programme mathématique, linéaire ou quadratique, en variables entières ou 0-1. Vous préciserez les variables utilisées ainsi que leur signification et choisirez vous-même les notations utilisées en détaillant précisément ce à quoi chaque notation correspond pour décrire les données du problème. Veillez particulièrement à distinguer les données du problème et les variables du problème. Précisez les contraintes. Comment régler la question de l'absence d'objectif à optimiser dans le problème (PRS) ?
3. Proposez pour le problème (PRC) uniquement une méthode heuristique ou détaillez l'application d'une méta-heuristique de votre choix, en précisant avec soin le voisinage adopté, pour la recherche d'une bonne solution admissible (pas nécessairement optimale). Vous testerez votre heuristique ou la méta-heuristique choisie sur les instances proposées sur le site de l'UE.
4. À l'aide du solveur Glpk, résolvez le problème (PRS) et déterminer une borne (supérieure ou inférieure compte tenu de la modélisation proposée) du problème (PRC) pour les instances du problème proposées sur le site de l'UE, et, lorsque c'est possible, la solution optimale de (PRC).

4) Échéancier et modalités

Les phases 1 et 2 du travail à réaliser sont à rendre pour le 13 mai 2011. Elle sera notée sur deux points de la note finale à l'UE. Ce travail de modélisation est individuel. Une modélisation sera ensuite proposée lors de la séance du 13/05.

Les phases 3 et 4 peuvent être réalisées en binôme. Un rapport présentant le travail réalisé pour les phases 3 et 4 est à rendre le 4 juillet 2011 au plus tard, par email de préférence. Une soutenance sera prévue la semaine du 4 juillet (ou plus tôt si vous le souhaitez).