L'algorithme du simplexe en programmation linéaire

Cédric BENTZ (CNAM)

RCP 104

2012-2013

Un autre exemple de PL

- On considère le programme linéaire PL1 :

$$\max\ 15\ x_1 + 25\ x_2$$ **Maximiser** une fonction **linéaire** en x_1 et x_2

sous contraintes :

$$x_1 + 3\ x_2 \leq 96$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$7\ x_1 + 4\ x_2 \leq 238$$

3 **contraintes linéaires** en x_1 et x_2

$$\underbrace{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}$$

Deux variables réelles x_1 et x_2, contraintes à être **positives**

Description formelle d'un PL

- Fonction **économique** / fonction **objectif** :

$$\text{max/min } \underbrace{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n}$$

c_i = ième coefficient (réel) de la fonction économique

- m **contraintes linéaires** = de la forme :

$$\underbrace{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n} \begin{cases} \geq b \\ \leq b \\ = b \end{cases}$$

b = second membre de la contrainte

m_i = ième coefficient (réel) de la contrainte

Contraintes de borne :
$x_i \geq 0$, $x_i \leq 5$, ...

- Les contraintes et la fonction économique sont des **combinaisons linéaires** des n variables réelles x_i

Forme canonique (FC) d'un PL

- Objectif : **max** $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$
- Sous les contraintes :

$m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + ... + m_{1n}x_n \leq b_1$

...

$m_{m1}x_1 + m_{m2}x_2 + ... + m_{mn}x_n \leq b_m$

$x_i \geq 0$ pour tout i entre 1 et n

Propriété de la FC d'un PL

- **Tout PL peut être mis sous FC**
  - Contrainte $m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n \geq b \Leftrightarrow$?
  - Contrainte $m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = b \Leftrightarrow$?
  - $x_i \leq 0 \Leftrightarrow$?
  - x_i réelle (non contrainte en signe) $\Leftrightarrow$?
  - Transformation de la fonction objectif
    - Min $c(x) \Leftrightarrow$ Max ?

Forme standard (FS) d'un PL

- Forme standard (FS) d'un PL ?
  - Idem forme canonique, **sauf que toutes les contraintes sont des égalités**
- Propriété : on peut passer de la FC d'un PL à sa FS en ajoutant à chaque contrainte une **variable d'écart** $e_j \geq 0$ (car associée à un écart ≥ 0)
  - On peut aussi retrancher une variable d'écart à toute contrainte de la forme $\geq b$
- Conséquence : tout PL peut être mis sous FS !

Petit lexique de la PL

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$: variables de décision (par opposition aux **variables d'écart**)
- Rappel : solution **admissible** = affectation de valeurs aux x_i **vérifiant les contraintes**
- Région/ensemble/domaine/polyèdre **admissible** = ensemble des solutions admissibles
- Rappel : solution **optimale** = solution admissible qui maximise la fonction économique

Intuition « géométrique » derrière l'algorithme du simplexe

- Rappel : on veut résoudre des PL à $n \geq 4$ variables
  - Méthode graphique inexploitable !
  - Difficulté initiale en PL : trouver une meilleure solution parmi un ensemble **infini** de solutions potentielles
  - Se ramener à un nombre **fini** de solutions ?
  - Idée simple conduisant à deux algorithmes :
    - Approche naïve (peu efficace)
    - Algorithme du simplexe

Exemple de la méthode "algébrique" pour résoudre PL1

1

$x_3 = 96 - x_1 - 3\,x_2$

$x_4 = 40 - x_1 - x_2$

$x_5 = 238 - 7\,x_1 - 4\,x_2$

$z = 3\,x_1 + 5\,x_2$

2

$x_2 = 32 - 1/3\,x_1 - 1/3\,x_3$

$x_4 = 8 - 2/3\,x_1 + 1/3\,x_3$

$x_5 = 110 - 17/3\,x_1 + 4/3\,x_3$

$z = 160 + 4/3\,x_1 - 5/3 x_3$

3

$x_1 = 12 + 1/2\,x_3 - 3/2\,x_4$

$x_2 = 28 - 1/2\,x_3 + 1/2\,x_4$

$x_5 = 42 - 3/2\,x_3 + 17/2\,x_4$

$z = 176 - x_3 - 2\,x_4$

Solution initiale de valeur 0 (associée aux variables d'écart x_3, x_4, x_5) : $x_3=96$, $x_4=40$, $x_5=238$

Améliorer cette solution (admissible) ?

<u>Idée</u> : augmenter une seule des variables nulles (à droite), en améliorant z

<u>1. Choix de variable</u> (solution initiale) : x_2 (choix arbitraire), x_1 reste nul

<u>2. Problème</u> : $x_1=0$, mais de combien peut-on augmenter x_2 pour que :

$$\left.\begin{array}{l} x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 96-3x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 32 \\ x_4 \geq 0 \Leftrightarrow 40-x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 40 \\ x_5 \geq 0 \Leftrightarrow 238-4x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 119/2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_2=32 \\ x_3=0 \end{array}$$

<u>3. Recommencer</u> (nouvelle solution) ?

Exprimer z, x_2, x_4, x_5 en fonction de x_1, x_3

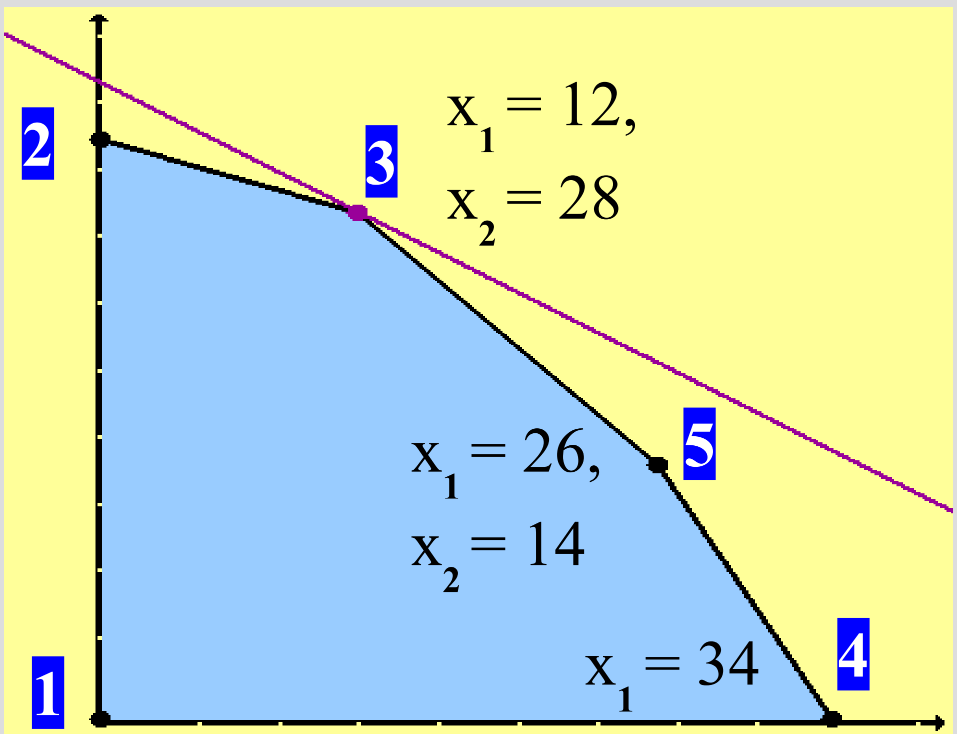
STOP, car $z \leq 176$ et donc solution optimale !

Bilan de la résolution de PL1 par la méthode algébrique

Durant le processus, 3 solutions admissibles (sommets) visitées

$x_2 = 32$

(origine)



1 Montre que $z \geq 0$

2 Montre que $z \geq 160$

3 Montre que $z \geq 176$ (cette solution, de valeur $5*176 = 880$, est optimale car $176\text{-}x_3\text{-}2x_4 \leq 176$)

Si, dans la 1ère solution, on augmente x_1 et non x_2, on visite 4>3 solutions admissibles **1** **4** **5** **3** $\Rightarrow$ en général, quel est le meilleur chemin ? Sa taille ?

Solution de base (concept non géométrique)

- Base d'un PL en FS à n variables et m contraintes
  - On suppose les contraintes linéairement indépendantes
  - **Base = choix de m variables**
    - Les m colonnes associées sont linéairement indépendantes (sous-matrice inversible)
  - **Les n-m autres variables sont nulles** ($\Rightarrow \leq$m var. **>** 0)
- Solution de base d'un PL en FS (définition « light »)
  - Solution associée à une base de ce PL $\Rightarrow$ exemple ?
  - Une telle solution x est **admissible** ssi $x \geq 0$
  - Un PL en FC peut en avoir jusqu'à $C^{m}_{n+m}=(n+m)!/(n!m!)$

Convexité

- Un ensemble $S \subset IR^n$ est **convexe** si pour tout x,y dans S, tout point du segment [x,y] est dans S
  - Exemple (n=2) : segment [x,y], un carré, un disque...
- **Enveloppe convexe** d'un ensemble de points x_i
  - C'est le plus petit ensemble convexe contenant les x_i
  - Par exemple : triangle pour 3 points non alignés...

Sommet d'un polyèdre (concept géométrique)

- Un point x d'un polyèdre P est un **sommet** (ou **point extrême**) ssi il n'est pas sur un segment reliant deux autres points de P entre eux
  - Ex. : sommets d'un segment [x,y]={x,y}
- **Propriété : un polyèdre borné est exactement l'enveloppe convexe de ses sommets**
  - Corollaire 1 : tout polyèdre borné est convexe
  - Corollaire 2 : tout PL qui a une (ou des) solution(s) optimale(s) a (au moins) un de ses sommets optimal
    - Vrai même si le domaine admissible est non borné...

Approche « naïve » pour la PL

- Idée initiale simple :
  - Tout polyèdre de IR^n a un nombre **fini** de sommets
  - Calculer la valeur de la fonction objectif en chaque sommet et garder le meilleur d'entre eux ?
  - NON : méthode peu efficace, car on peut montrer que
    - **Pour un polyèdre P et pour $x \in P$, x est un sommet de P ssi x est une solution de base admissible de P**
    - PL1 a donc 5 solutions de base admissibles
    - Si m=n=50, on peut avoir $C^m_{n+m}=C^{50}_{100} \approx 10^{29}=10^{12}(10^9.10^8)$ solutions de base admissibles (impraticable) !

Vers une approche moins naïve : idée de l'algorithme du simplexe

- Principe de l'**algorithme du simplexe** :
  - Plutôt que d'énumérer toutes les solutions de base admissibles, on va en parcourir certaines
  - Concrètement, on passe d'un sommet (solution de base admissible) à un autre, dont la valeur est meilleure (vis-à-vis de la fonction objectif)
  - Finalement, quand ce n'est plus possible, on peut montrer qu'on obtient bien une solution optimale
  - Il reste à trouver comment faire : la présentation qui suit ne nécessite même pas d'avoir compris les liens évoqués avec les solutions de base admissibles...

Une autre vision de la FS : une solution initiale simple

- Soit P un PL sous FS
  - On définit la **solution initiale de la méthode algébrique** de P en faisant passer toutes les variables à droite, sauf les variables d'écart
    - Donc, équivalence entre la FS et cette solution initiale
  - Plus généralement, à chaque étape on a l'expression de m var. en fonction des autres (m = nb contraintes)
    - Les variables « à gauche » sont supposées non nulles, les variables « à droite » sont supposées nulles
    - Chaque étape $\leftrightarrow$ solution de base !
    - La solution « initiale » est donc associée à l'origine (variables de décision nulles, variables d'écart non nulles)

Tableaux du simplexe

- **Tableau** = idem méthode algébrique avec toutes les var. (nulles et non nulles) à gauche de l'égalité
  - Forme « traditionnelle » de l'algorithme du simplexe
  - Principe identique à la méthode algébrique
    - Sur chaque ligne : une variable non nulle exprimée (donc de coefficient 1) en fonction des variables nulles
    - Condition d'optimalité identique : ligne de z quasi-inchangée (gauche ↔ droite), seul le terme constant change de côté
    - De même, on a : 1 tableau=1 solution de base
    - Formules de mises à jour (= passage de la solution courante à la solution suivante) ?

Vocabulaire des tableaux

- Variable :
  - **hors-base** = variable nulle
  - **en base** = variable non nulle
  - **entrante** = variable nulle qui devient non nulle
  - **sortante** = variable non nulle qui devient nulle
- **Coûts réduits** = coefficients dans l'expression de la fonction objectif z
- **Pivot** = coefficient de la variable entrante dans l'expression de la variable sortante

Résolution de PL sous FC à l'aide de tableaux

Tableau initial
1. Définition des variables d'écart
2. Tableau initial = FS du PL obtenu

x_e n'existe pas

STOP
(Solution optimale de valeur z*, car $z = z^* + \Sigma_i \text{coût réduit}_i \, x_i \leq z^*$)

Choix d'une variable entrante hors-base x_e (de coût réduit>0)

x_e existe (plus grand coût réduit ?)

Nouveau tableau (sommet)

1. Diviser la ligne de x_s par le pivot
2. Calcul de la nouvelle ligne j
3. Calcul de la nouvelle ligne de z = ancienne ligne de z – (coût réduit de x_e)(nouvelle ligne de x_s)

x_s existe

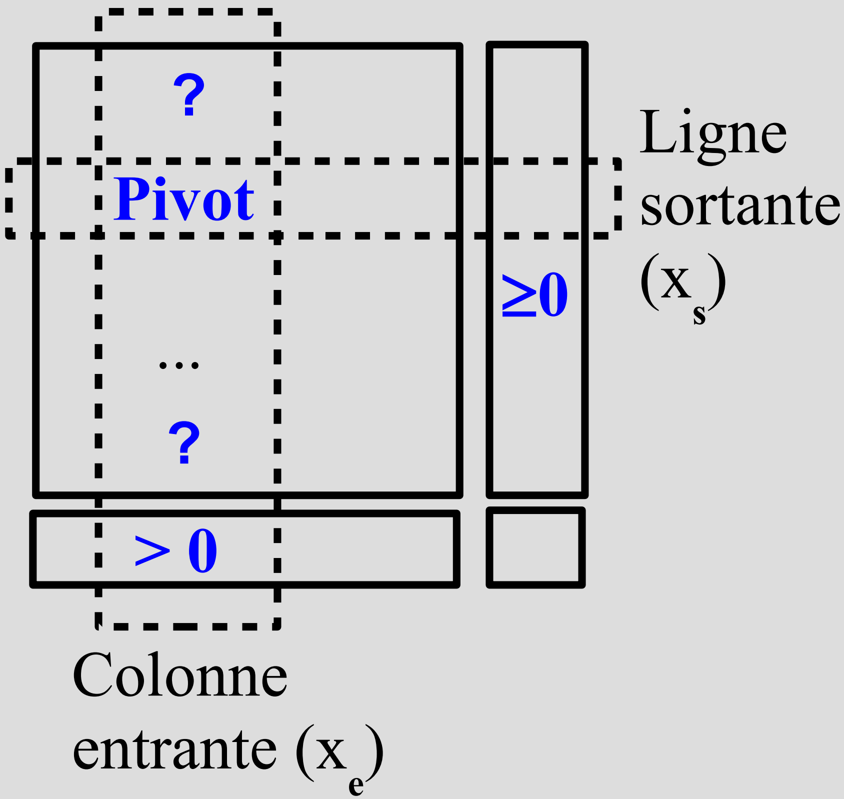
Choix de la variable de base sortante x_s = 1ère variable qui s'annule quand x_e augmente

x_s n'existe pas

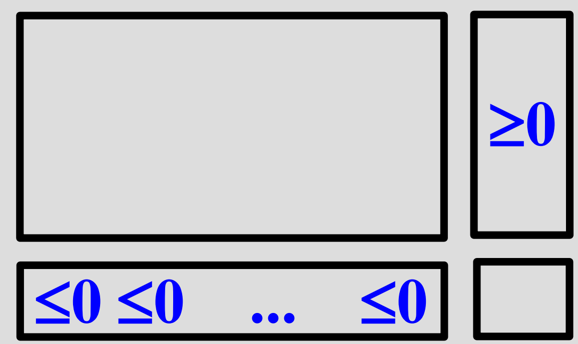
STOP
(Solution optimale rejetée à l'infini car z augmente sans fin avec x_e)

Illustration de la méthode des tableaux du simplexe

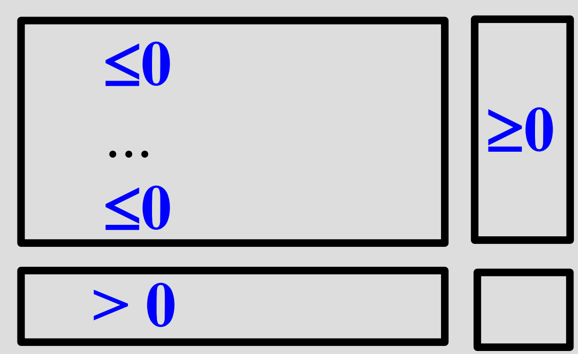
Cas général



Cas particulier 1 : la solution est optimale



Cas particulier 2 : solution optimale rejetée à l'infini



Une infinité de solutions optimales

- Rappel : un PL ayant une valeur optimale finie peut admettre une infinité de solutions optimales
  - Condition nécessaire et suffisante (cf PL1) ?
    - Cas n=2 : une contrainte parallèle à la fonction objectif, qui définit un des côtés « bien situés » de la région admissible
  - Et en terme de tableaux du simplexe ?
    - A une itération associée à un des sommets situés sur cette contrainte, une des variables hors-base a un coût réduit nul
      - Augmenter cette variable ne modifie donc pas la valeur de l'objectif
    - D'où CNS : infinité de solutions optimales ssi une solution optimale avec (au moins) un coût réduit hors-base nul

Efficacité du simplexe

- Rappel : plusieurs « cheminements » possibles pour aboutir à la solution optimale par simplexe
  - Comment trouver le meilleur ? Et sa longueur ?
    - Cf PL1 : deux, de longueurs respectives 3 et 4
  - Problème : en théorie, l'algorithme peut être obligé de visiter un nb de sommets non polynomial en m et n
    - Cf instances de Klee & Minty
    - Mais il finit : à chaque itération, on explore un sommet meilleur, donc au pire on explore tous les sommets (nb fini)
      - En fait, l'algorithme peut parfois ne pas finir : cf dégénérescences...
    - En pratique, il est très utilisé car très efficace : **entre 3m/2 et 3m itérations en moyenne** (m = nombre de contraintes)