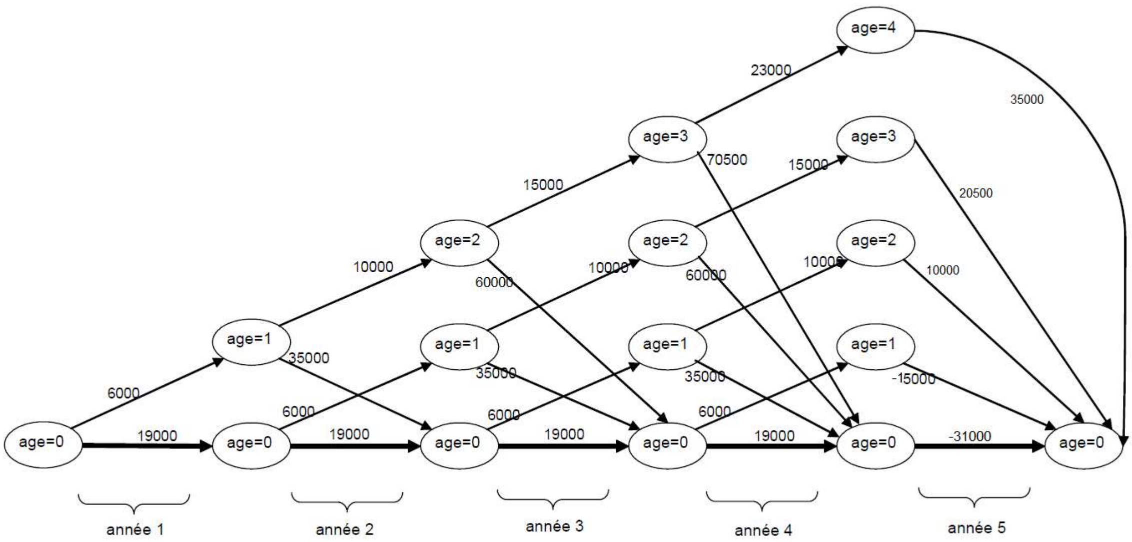
Corrigé indicatif

Feuille d'ED n°2 – Cheminement optimal

ED 2 – Exercice 1 – Corrigé indicatif

Il faut considérer ici d'une part que la personne revend sa voiture à l'issue de la cinquième année, et d'autre part qu'il a la possibilité de la revendre plusieurs fois au cours de la période étudiée (5 ans). On obtient alors le graphe suivant dans lequel les sommets indiquent l'âge de la voiture pour une année donnée : après une revente, l'âge redevient 0. Les arcs indiquent le coût de passage d'une année sur l'autre, sachant que le coût de maintenance est à payer même si on revend la voiture à la fin de l'année (il a bien fallu l'entretenir durant l'année où l'on s'en est servie). On cherche alors dans ce graphe un plus court chemin du sommet entrée (le plus à gauche) au sommet sortie (le plus à droite), en appliquant l'algorithme de Ford (graphe sans circuit déjà mis en niveaux). Le plus court chemin est alors celui indiqué en gras. La valeur de ce chemin donne les dépenses minimales sur 5 ans : 45 000 u.m. (il faut revendre la voiture tous les ans). Remarque : le coût d'achat initial (à t=0), de 50000 u.m., est le même pour tous les chemins, on ne le représente pas sur le graphe.



(eric.soutil@cnam.fr)

Exercice 2

Voici l'évolution du tableau des distances (π) et des pères :

Itération	Pivot de l'itération courante	$\pi(x_1)$	$\pi(x_2)$	$\pi(x_3)$	$\pi(x_4)$	$\pi(x_5)$	$\pi(x_6)$
Init.	-	$\boxed{0}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
j=1	x_1	0	$\boxed{2}$	6	9	$+\infty$	$+\infty$
j=2	x_2	0	2	6	9	$\boxed{3}$	$+\infty$
j=3	x_5	0	2	$\boxed{5}$	9	3	12
j=4	x_3	0	2	5	$\boxed{6}$	3	11
j=5	x_4	0	2	5	6	3	$\boxed{7}$

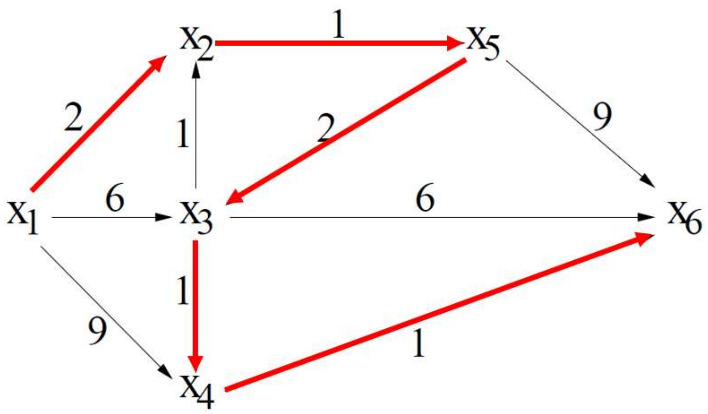
Itération	$père(x_1)$	$père(x_2)$	$père(x_3)$	$père(x_4)$	$père(x_5)$	$père(x_6)$
Init.	-	-	-	-	-	-
j=1	-	x_1	x_1	x_1	-	-
j=2	-	x_1	x_1	x_1	x_2	-
j=3	-	x_1	x_5	x_1	x_2	x_5
j=4	-	x_1	x_5	x_3	x_2	x_3
j=5	-	x_1	x_5	x_3	x_2	x_4

- Remarque 1 : On a encadré en rouge, à la fin de chaque itération la plus petite des distances provisoires qui permet de déterminer le pivot de l'itération suivante ;
- Remarque 2 : si l'on souhaite obtenir le plus court chemin de x_1 à un sommet en particulier, il est possible d'arrêter l'algorithme lorsque le sommet cible devient pivot.

Le plus court chemin de x_1 à x_6 est donc de valeur 7. Pour le retrouver, on utilise le tableau des pères, en regardant quel est le père du sommet x_6 (c'est x_4), puis quel est le père du sommet trouvé (c'est x_3), et ainsi de suite jusqu'à remonter au sommet racine x_1. On trouve ainsi le chemin :

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_6$$

Et voici, en rouge, l'arborescence des plus courts chemins correspondant à l'ensemble des arcs $(père(x), x)$



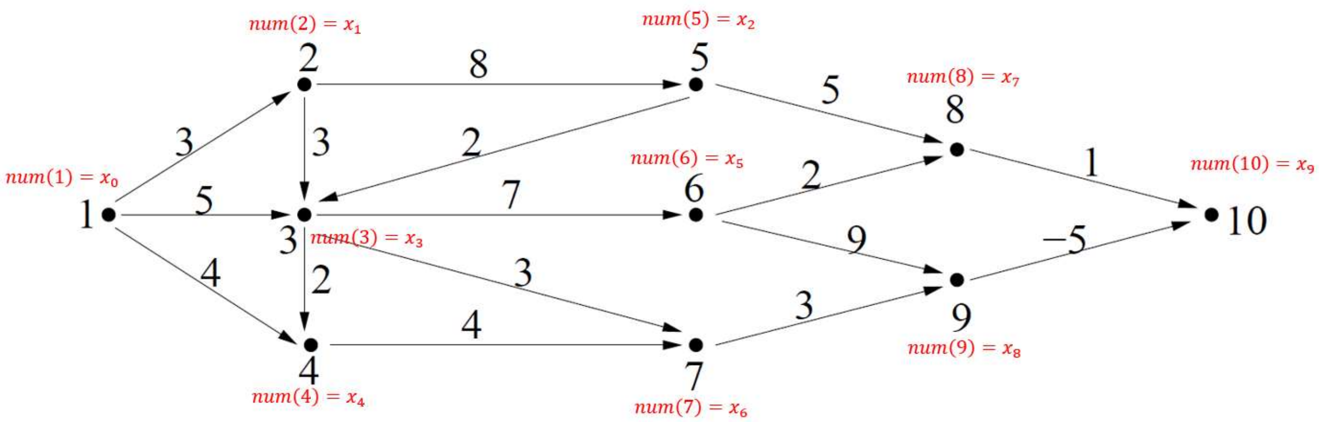
(eric.soutil@cnam.fr)

<u>Exercice 3</u>

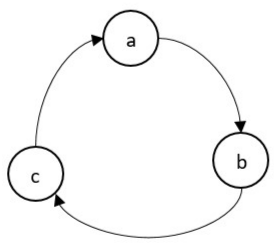
<u>Remarque</u> : il n'y a pas de différence entre « numérotation topologique des sommets » et « fonction ordinale appliquée aux sommets ».

1. On applique l'algorithme de numérotation topologique au graphe de l'énoncé. On obtient :

- On numérote x_0 l'unique sommet sans prédécesseur à savoir le sommet 1 : $\boldsymbol{num(1) \leftarrow x_0}$
- $\boldsymbol{i = 1}$: 2 est le seul sommet dont tous les prédécesseurs soient numérotés : $\boldsymbol{num(2) \leftarrow x_1}$
- $\boldsymbol{i = 2}$: :5 est le seul sommet dont tous les prédécesseurs soient numérotés : $\boldsymbol{num(5) \leftarrow x_2}$
- $\boldsymbol{i = 3}$: : 3 est le seul sommet dont tous les prédécesseurs soient numérotés : $\boldsymbol{num(3) \leftarrow x_3}$
- $\boldsymbol{i = 4}$: : 4 et 6 ont tous leurs prédécesseurs numérotés, on choisit arbitrairement : $\boldsymbol{num(4) \leftarrow x_4}$
- $\boldsymbol{i = 5}$: : 6 et 7 ont tous leurs prédécesseurs numérotés, on choisit arbitrairement : $\boldsymbol{num(6) \leftarrow x_5}$
- $\boldsymbol{i = 6}$: : 7 et 8 ont tous leurs prédécesseurs numérotés, on choisit arbitrairement : $\boldsymbol{num(7) \leftarrow x_6}$
- $\boldsymbol{i = 7}$: : 8 et 9 ont tous leurs prédécesseurs numérotés, on choisit arbitrairement : $\boldsymbol{num(8) \leftarrow x_7}$
- $\boldsymbol{i = 8}$: : 9 est le seul sommet dont tous les prédécesseurs soient numérotés : $\boldsymbol{num(9) \leftarrow x_8}$
- $\boldsymbol{i = 9}$: : 10 est le seul sommet dont tous les prédécesseurs soient numérotés : $\boldsymbol{num(10) \leftarrow x_9}$



2. Lorsqu'on applique l'algorithme, à chaque étape il peut y avoir plusieurs sommets sans prédécesseurs ou plusieurs sommets dont tous les prédécesseurs sont numérotés (comme cela se produit par exemple à l'étape $i = 4$ de la question précédente). Il existe donc plusieurs fonctions ordinales.
3. Si un circuit existe, aucune numérotation topologique n'est possible :



On devrait en effet avoir : $num(a) < num(b) < num(c) < num(a)$

Dans l'algorithme, cela se traduit par le fait que les sommets du circuit ne peuvent être numérotés : ils ont toujours un prédécesseur non numérotés.

4. Nous avons vu en cours que lorsqu'un graphe est sans circuit, il possède toujours un sommet sans prédécesseur. On peut donc trouver dans le graphe G sans circuit un premier sommet sans prédecesseur que l'on peut numéroter x_0. Si l'on supprime mentalement ce sommet et tous les arcs qui lui sont adjacents, le graphe reste sans circuit et il existe donc un nouveau sommet sans prédécesseur dans le

nouveau graphe. Ce nouveau sommet peut recevoir le numéro suivant : x_1. Dans l'algorithme, il s'agit en effet dans le graphe de départ soit d'un sommet sans prédécesseur soit d'un sommet dont tous les prédécesseurs ont été numérotés. On peut alors répéter le procédé : supprimer mentalement ce nouveau sommet x_1 et les arcs qui lui sont adjacents fait apparaître un nouveau sommet sans prédécesseur qui peut recevoir le numéro suivant (x_2), et ainsi de suite jusqu'à avoir numéroté (supprimé) tous les sommets du graphe.

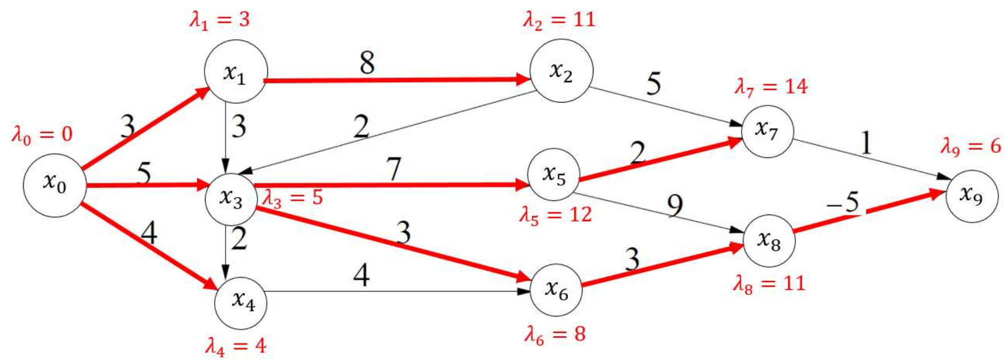
5. Il est possible de ré-écrire l'algorithme de Ford appliqué à un graphe sans circuit dans lequel on a déterminé au préalable une numérotation topologique $(x_0, x_1, \dots, x_n)$:

algorithme Ford_Topologique(G : graphe)
début
// on suppose que les sommets $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ sont dans un ordre topologique
$\lambda_0 \leftarrow 0$
pour i de 1 à n **faire** :
$$\lambda_i \leftarrow \min_{\{j \in \Gamma^-(x_i)\}} \lambda_j + \ell(x_i \to x_j)$$
fait
fin

Remarques :

- $\ell(x_j \to x_i)$ désigne la valuation de l'arc (x_j, x_i)
- cet algorithme est connu sous le nom d'algorithme de Bellman.
- il serait possible de mémoriser le père de chaque sommet x_i (comme étant le sommet x_j réalisant le minimum lors du calcul de λ_i) pour reconstituer les plus cours chemins et tracer l'arborescence des plus courts chemins

Appliquons cet algorithme au graphe de départ dans lequel on a renuméroté les sommets avec la numérotation topologique trouvée dans les questions précédentes :



$\lambda_1 = \text{Min}(0+3) = 0+3 = 3$, minimum atteint à partir de x_0
$\lambda_2 = \text{Min}(3+8) = 3+8 = 11)$, minimum atteint à partir de x_1
$\lambda_3 = \text{Min}(0+5; 3+3; 11+2) = 5$, minimum atteint à partir de x_0
$\lambda_4 = \text{Min}(0+4; 5+2) = 4$, minimum atteint à partir de x_0
$\lambda_5 = \text{Min}(5+7) = 5+7 = 12$, minimum atteint à partir de x_3
$\lambda_6 = \text{Min}(5+3; 4+4) = 8$, minimum atteint à partir de x_3 (choix arbitraire)
$\lambda_7 = \text{Min}(11+5; 12+2) = 14$, minimum atteint à partir de x_5
$\lambda_8 = \text{Min}(12+9; 8+3) = 11$, minimum atteint à partir de x_6
$\lambda_9 = \text{Min}(11-5; 14+1) = 6$, minimum atteint à partir de x_8

Le plus court chemin de x_0 à x_9 est donc de longueur totale $\lambda_9 = 6$, et il s'agit du chemin :

$$x_0 \to x_3 \to x_6 \to x_8 \to x_9$$

(c'est-à-dire le chemin $1 \to 3 \to 7 \to 9 \to 10$, de longueur totale 6, dans le graphe de départ).

(eric.soutil@cnam.fr)

Exercice 4

On applique la méthode matricielle au graphe proposé. Voici le résultat de l'application de l'algorithme de Floyd-Warshall (méthode matricielle).

```
> run Floyd_Warshall
Iteration 0 :
Matrice M0 :                Matrice P :
[INF INF   3   2 INF ]      [- - A A - ]
[INF INF INF  -2   5 ]      [- - - B B ]
[INF   2 INF  -1 INF ]      [- C - C - ]
[INF INF   2 INF   3 ]      [- - D - D ]
[INF INF INF INF INF ]      [- - - - - ]

Iteration 1 :
Matrice M1 :                Matrice P :
[INF INF   3   2 INF ]      [- - A A - ]
[INF INF INF  -2   5 ]      [- - - B B ]
[INF   2 INF  -1 INF ]      [- C - C - ]
[INF INF   2 INF   3 ]      [- - D - D ]
[INF INF INF INF INF ]      [- - - - - ]

Iteration 2 :
Matrice M2 :                Matrice P :
[INF INF   3   2 INF ]      [- - A A - ]
[INF INF INF  -2   5 ]      [- - - B B ]
[INF   2 INF  -1   7 ]      [- C - C B ]
[INF INF   2 INF   3 ]      [- - D - D ]
[INF INF INF INF INF ]      [- - - - - ]

Iteration 3 :
Matrice M3 :                Matrice P :
[INF   5   3   2  10 ]      [- C A A B ]
[INF INF INF  -2   5 ]      [- - - B B ]
[INF   2 INF  -1   7 ]      [- C - C B ]
[INF   4   2   1   3 ]      [- C D C D ]
[INF INF INF INF INF ]      [- - - - - ]

Iteration 4 :
Matrice M4 :                Matrice P :
[INF   5   3   2   5 ]      [- C A A D ]
[INF   2   0  -2   1 ]      [- C D B D ]
[INF   2   1  -1   2 ]      [- C D C D ]
[INF   4   2   1   3 ]      [- C D C D ]
[INF INF INF INF INF ]      [- - - - - ]

Iteration 5 :
Matrice M5 :                Matrice P :
[INF   5   3   2   5 ]      [- C A A D ]
[INF   2   0  -2   1 ]      [- C D B D ]
[INF   2   1  -1   2 ]      [- C D C D ]
[INF   4   2   1   3 ]      [- C D C D ]
[INF INF INF INF INF ]      [- - - - - ]
```

Pour chercher les chemins de longueur minimale plutôt que maximale, il convient d'adapter l'algorithme en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$ dans l'initialisation et « < » par « > » dans le test pour l'éventuelle mise à jour de l'élément (i,j) de la matrice M^k.

(eric.soutil@cnam.fr)