TD 5

Exercice 1 : dualité

Formuler le problème dual de chacun des programmes linéaires suivants :

1. $\min\{-2x_1+7x_2$, sous contraintes $x_1-x_2=3, x_1+5x_2 \leq 6, -2x_1+x_2 \geq 1, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$
2. $\max\{2x_2$, sous contraintes $8x_1+3x_2=1, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$
3. $\min\{x_1$, sous contraintes $-3x_1 \leq 3, x_2 \leq 11, x_1 \geq 0\}$

Exercice 2 : conditions d'optimalité

On considère le PL suivant :

$$\begin{array}{rl} \max & 4x_1+12x_2+3x_3 \\ \text{s.c.} & x_1 \leq 1000 \\ & x_2 \leq 500 \\ & x_3 \leq 1500 \\ & 3x_1+6x_2+2x_3 \leq 6750 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

On souhaite tester l'optimalité de la solution (primale) $x_1 = 250$, $x_2 = 500$, $x_3 = 1500$.

1. Montrer que cette solution est optimale à l'aide du dual de ce PL (pour cela, on déterminera une solution admissible particulière du dual).
2. Après vérification, il s'avère que les données initiales du PL sont légèrement erronées. Les nouveaux seconds membres des quatre contraintes sont respectivement 950, 550, 1575 et 6900. Ecrire le dual de ce nouveau PL, et montrer que la solution duale trouvée précédemment est admissible pour ce nouveau dual. Cette solution est-elle optimale pour le nouveau dual (on utilisera le primal pour répondre à cette question) ? Déterminer une solution optimale pour le nouveau primal.

3. Finalement, les données initiales du PL étaient justes, mis à part le second membre de la quatrième contrainte. Les nouveaux seconds membres sont respectivement 1000, 500, 1500 et 9750. Montrer que la solution duale déterminée à la question 1 est admissible pour le dual de ce nouveau PL. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution du primale associée à cette solution duale. Cette solution primale est-elle admissible ? Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 3 : dualité et résolution graphique

Résoudre le programme linéaire suivant graphiquement :

$$\begin{array}{rl} \min & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 \geq 5 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \geq 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 4 : paramétrisation de la fonction objectif

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rl} \max & \frac{5}{2}x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Résoudre ce PL par l'algorithme du simplexe : à chaque itération, on augmentera la variable candidate de plus petit indice. Pour quelles valeurs de $\lambda < 1$ la solution optimale obtenue reste-t-elle optimale pour la fonction objectif $\frac{5\lambda}{2}x_1 + 5x_2$?

Vérifier ensuite graphiquement.

Exercice 5 : dualité et modifications de contraintes

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ & x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Calculer le tableau optimal du simplexe pour ce PL en le résolvant graphiquement, puis en calculant algébriquement l'expression des variables non nulles en fonction des variables nulles.

2. La solution optimale obtenue reste-t-elle optimale si on modifie la fonction objectif en $\max 3x_1 + 5x_2$?

3. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & -9x_1 + 3x_2 + 12x_3 \\ \text{s.c.} \quad & -3x_1 + 3x_3 \geq 2 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Que se passe-t-il si on remplace les valeurs 2 et 1 du second membre de ce PL par 3 et 5 respectivement ?

Exercice 6 : rentabilité d'un plan de production

Une entreprise fabrique trois types de produits, A, B et C. Chaque produit nécessite des matières premières et de la main d'œuvre, ainsi que de l'espace de stockage.

Voici les besoins en matières premières, mains d'œuvre et stockage pour une unité de chacun des 3 types de produits :

- Produit A : 4 kg de matières premières, 2 heures de main d'œuvre, 1 unité de vol.
- Produit B : 2 kg de matières premières, 1/2 heure de main d'œuvre, 1 unité de vol.
- Produit C : 1 kg de matières premières, 3 heures de main d'œuvre, 1 unité de vol.

Chaque produit rapporte 6 euros s'il est de type A, 2 euros s'il est de type B, et 4 euros s'il est de type C. Les ressources disponibles sont 6000 kg de matières premières, 4000 heures de main d'œuvre, et 2500 unités de volume de stockage.

1. Montrer que le problème consistant à maximiser le revenu de l'entreprise (en décidant du nombre de produits de type A, B et C à fabriquer)

peut être modélisé par le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.c.} \quad & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6000 \\ & 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 \leq 4000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2500 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. On peut montrer que la solution optimale pour ce PL est celle dans laquelle les variables non nulles sont x_1, x_3, et la variable d'écart de la troisième contrainte. Déterminez le plan de fabrication optimal de cette entreprise.

3. Un concurrent, qui manque de matières premières, propose d'en racheter 300 kg à cette entreprise, au prix de 1.5 euros par kg. Pensez-vous que l'entreprise devrait accepter cette proposition ? (On supposera qu'elle l'accepte si elle est rentable.)

Exercice 7 : paramétrisation du dual

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.c.} \quad & 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Résoudre ce PL par l'algorithme du simplexe, et donner la solution optimale. On suppose que le second membre de la première contrainte passe de 1 à un paramètre λ : pour quelles valeurs de λ la solution admissible dans laquelle les variables non nulles sont les mêmes que dans la solution optimale précédente reste-t-elle optimale ?